②如图(2),当$\triangle ACE\backsim\triangle DBE$时,$\angle BDE=\angle CAE$. 过$B$作$BH\perp DC$于$H$,$\therefore\angle BHD=90°$,$BH=t$,$DH=-t^2+t$,

$\therefore\tan\angle BDE=\frac{BH}{DH}=\tan\angle CAE=\frac{OB}{OA}$,$\therefore\frac{t}{-t^2+t}=\frac{6}{3}=2$,

$\therefore -2t^2+2t=t$,解得$t=0$(舍去)或$t=\frac{1}{2}$,$\therefore D\left(\frac{1}{2},\frac{25}{4}\right)$.

综上所述,点D的坐标为$(1,6)$或$\left(\frac{1}{2},\frac{25}{4}\right)$.

(3)如图(3),$\because$四边形$EGFD$为菱形,

$\therefore DE/\!/FG$,$DE=FG$,$ED=EG$.

设点$D(m,-m^2+m+6)$,$F(n,-n^2+n+6)$,则$E(m,-2m+6)$,$G(n,-2n+6)$,

$\therefore DE=-m^2+3m$,$FG=-n^2+3n$,$\therefore -m^2+3m=-n^2+3n$,即$(m-n)(m+n-3)=0$.

$\because m-n\neq0$,$\therefore m+n-3=0$,即$m+n=3$.

$\because A(3,0)$,$B(0,6)$,$\therefore AO=3$,$BO=6$,

$\therefore AB=\sqrt{AO^2+BO^2}=3\sqrt{5}$.

过点G作$GK\perp DC$于K,$\therefore KG/\!/AC$,$\therefore\angle EGK=\angle BAC$,

$\therefore\cos\angle EGK=\frac{KG}{EG}=\cos\angle BAC=\frac{OA}{AB}$,即$\frac{|n-m|}{EG}=\frac{3}{3\sqrt{5}}$,

$\therefore EG=\sqrt{5}|n-m|=\sqrt{5}|3-2m|$.

$\because DE=EG$,$\therefore -m^2+3m=\sqrt{5}|3-2m|$,

$\therefore m^2-(3+2\sqrt{5})m+3\sqrt{5}=0$或$m^2-(3-2\sqrt{5})m-3\sqrt{5}=0$,解得$m=\frac{3+2\sqrt{5}+\sqrt{29}}{2}$(不合题意,舍去)或$m=\frac{3+2\sqrt{5}-\sqrt{29}}{2}$或$m=\frac{3-2\sqrt{5}+\sqrt{29}}{2}$或$m=\frac{3-2\sqrt{5}-\sqrt{29}}{2}$(不合题意,舍去),

$\therefore m=\frac{3+2\sqrt{5}-\sqrt{29}}{2}$或$m=\frac{3-2\sqrt{5}+\sqrt{29}}{2}$,$\therefore$点$D$的横坐标为$\frac{3+2\sqrt{5}-\sqrt{29}}{2}$或$\frac{3-2\sqrt{5}+\sqrt{29}}{2}$.

第四章　三角形

A 2025 真题诊断练

刷 诊断

1. A 【解析】依据的数学原理是垂线段最短,故选A.

2. D 【解析】由题可知,$\alpha=90°+60°=150°$,故选D.

3. D 【解析】由作图可知$\angle AEG=\angle FEG$. $\because\angle AEF=80°$,$\therefore\angle AEG=\angle FEG=\frac{1}{2}\angle AEF=40°$. $\because AB/\!/CD$,$\therefore\angle EGF=\angle AEG=40°$,故选D.

4. B 【解析】A选项,$1+2=3$,不能构成三角形,故本选项不符合题意;B选项,$2+3>4$,能构成三角形,故本选项符合题意;C选项,$3+5=8$,不能构成三角形,故本选项不符合题意;D选项,$5+4<10$,不能构成三角形,故本选项不符合题意. 故选B.

5. A 【解析】$\tan 45°-\sqrt{2}\cos 45°=1-\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=0$,故选A.

6. C 【解析】在Rt$\triangle ACB$中,$\because\angle ACB=90°$,D为AB中点,$\therefore CD=\frac{1}{2}AB=AD=BD$,$\therefore\angle A=\angle ACD=20°$,$\angle B=\angle BCD=90°-20°=70°$. $\because DE\perp AC$,$\therefore\angle AED=\angle CED=90°$,$\therefore\angle ADE=\angle CDE=90°-20°=70°$. $\because\angle A=20°$,$\therefore\angle A$的余角为$70°$,$\therefore$题图中与$\angle A$互余的角是$\angle B$,$\angle DCB$,$\angle CDE$,$\angle ADE$,共有4个. 故选C.

7. C 【解析】$\because$点A,A'的坐标分别为$(2,0)$,$(3,0)$,$\therefore OA=2$,$OA'=3$. $\because$五边形$ABCDE$,$A'B'C'D'E'$是以坐标原点O为位似中心的位似图形,$\therefore OA:OA'=DE:D'E'=2:3$. $\because DE=3$,$\therefore D'E'=\frac{9}{2}$,故选C.

8. B 【解析】$\because$题图中四周网格线构成的四边形是矩形,AC是其对角线,DE所在的直线是其对称轴,$\therefore\frac{AE}{AC}=\frac{1}{2}$. $\because DE/\!/BC$,$\therefore\triangle ADE\backsim\triangle ABC$,$\therefore\frac{DE}{BC}=\frac{AE}{AC}$,即$\frac{DE}{2}=\frac{1}{2}$,$\therefore DE=1$. 故选B.

9. B 【解析】$\because\angle A=120°$,$AB=AC$,$\therefore\angle C=30°$,$\therefore$在Rt$\triangle DEC$中,$CD=\frac{DE}{\tan 30°}=3$. $\because D$为AC中点,$\therefore AC=6$. 故选B.

10. (答案不唯一)-3　1　【解析】当$a=-3$,$b=1$时,$a^2>4b^2$,但是$a<2b$,故答案为-3,1(答案不唯一).

11. 11,60,61　【解析】第①组勾股数为$2\times1+1=3$,$2\times1^2+2\times1=4$,$2\times1^2+2\times1+1=5$;

第②组勾股数为$2\times2+1=5$,$2\times2^2+2\times2=12$,$2\times2^2+2\times2+1=13$;

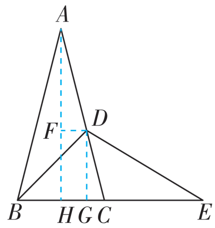
第③组勾股数为$2\times3+1=7$,$2\times3^2+2\times3=24$,$2\times3^2+2\times3+1=25$;

第④组勾股数为$2\times4+1=9$,$2\times4^2+2\times4=40$,$2\times4^2+2\times4+1=41$;

所以第⑤组勾股数为$2\times5+1=11$,$2\times5^2+2\times5=60$,$2\times5^2+2\times5+1=61$.

故答案为11,60,61.

12. 4　$\frac{2\sqrt{17}}{3}$　【解析】如图，作 $AH\perp BC$，$DG\perp BC$，$DF\perp AH$，垂足分别为 H,G,F，则四边形 $DFHG$ 为矩形，$\therefore DG=FH$，$DF=HG$，$DF/\!/HG$，$DG/\!/AH$. $\because \angle DBC=45°$，$\therefore \triangle BDG$ 为等腰直角三角形，$\therefore BG=DG$. $\because AB=AC$，$\therefore BH=CH$，$\angle ABC=\angle ACB$. $\because DF/\!/BC$，$\therefore \triangle ADF\backsim\triangle ACH$，



$\therefore \frac{DF}{CH}=\frac{AD}{AC}=\frac{AD}{AD+CD}=\frac{3}{5}$，$\therefore$ 设 $DF=3x$，$CH=5x$，则 $HG=DF=3x$，$BH=CH=5x$，$\therefore DG=BG=BH+HG=8x$，$CG=CH-HG=2x$，$\therefore BD=8\sqrt{2}x$. 在 Rt$\triangle CGD$ 中，$\tan\angle ACB=\frac{DG}{CG}=\frac{8x}{2x}=4$，由勾股定理，得 $(2x)^2+(8x)^2=2^2$，解得 $x=\frac{\sqrt{17}}{17}$（负值已舍去），$\therefore BD=8\sqrt{2}x=\frac{8\sqrt{34}}{17}$，$BC=2CH=10x=\frac{10\sqrt{17}}{17}$. $\because \angle CED=\angle ABD$，$\angle ACB=\angle E+\angle CDE$，$\angle ABC=\angle ABD+\angle CBD$，$\angle ABC=\angle ACB$，$\therefore \angle CDE=\angle CBD=45°$. 又 $\because \angle E=\angle E$，$\therefore \triangle DEC\backsim\triangle BED$，$\therefore \frac{DE}{BE}=\frac{CE}{DE}=\frac{CD}{DB}=\frac{2}{\frac{8\sqrt{34}}{17}}=\frac{\sqrt{34}}{8}$，$\therefore DE=\frac{8}{\sqrt{34}}CE$，$DE^2=BE\cdot CE=(BC+CE)\cdot CE$，$\therefore \left(\frac{8}{\sqrt{34}}CE\right)^2=\left(\frac{10\sqrt{17}}{17}+CE\right)\cdot CE$，解得 $CE=0$（舍去）或 $CE=\frac{2\sqrt{17}}{3}$. 故答案为 4，$\frac{2\sqrt{17}}{3}$.

13.【证明】在 $\triangle AOC$ 和 $\triangle BOD$ 中，$\begin{cases}\angle COA=\angle DOB,\\ \angle C=\angle D,\\ AC=BD,\end{cases}$

$\therefore \triangle AOC\cong\triangle BOD$（AAS）.

14.（1）【解】$\because \triangle ABC$ 是等边三角形，$\therefore \angle ACB=60°$.

$\because D$ 是 AB 的中点，$\therefore \angle DCB=\angle DCA=\frac{1}{2}\angle ACB=30°$.

$\because CE\perp BC$，$\therefore \angle BCE=90°$，

$\therefore \angle DCE=\angle BCE-\angle DCB=60°$.

（2）【证明】$\because \triangle ABC$ 是等边三角形，D 是 AB 的中点，

$\therefore AB=BC$，$\angle ABC=60°$，$CD\perp AB$，

$\therefore \angle BDC=90°$.

由平移得 $CD/\!/EF$，$\therefore \angle BAE=\angle BDC=90°$.

在 Rt$\triangle ABE$ 和 Rt$\triangle CBE$ 中，

$\because \begin{cases}AB=CB,\\ BE=BE,\end{cases}$

$\therefore$ Rt$\triangle ABE\cong$Rt$\triangle CBE$（HL），

$\therefore \angle ABE=\angle EBC=30°$，

$\therefore \angle BEC=90°-\angle EBC=60°$.

又 $\because \angle DCE=60°$，$\therefore \triangle CEG$ 是等边三角形.

15.【解】（1）如图所示，过点 A 作 $AE\perp CD$ 于 E，过点 B 作 $BF\perp CD$ 于 F，$\therefore \angle AED=\angle BFC=90°$.

由题意得，$\angle DAE=30°$，$\therefore$ 在 Rt$\triangle ADE$ 中，$AE=AD\cdot\cos\angle DAE=20\times\frac{\sqrt{3}}{2}=10\sqrt{3}$（千米），

$DE=AD\cdot\sin\angle DAE=20\times\frac{1}{2}=10$（千米）.

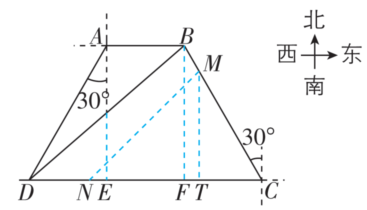
$\because$ 甲无人机位于 A 的正东方向 10 千米的 B 处，D 位于 C 的正西方向上，$\therefore AB/\!/CD$，$\therefore AE\perp AB$，$BF\perp AB$，

$\therefore$ 四边形 $AEFB$ 是矩形，

$\therefore EF=AB=10$ 千米，$BF=AE=10\sqrt{3}$ 千米，

$\therefore DF=DE+EF=20$ 千米，$\therefore BD=\sqrt{DF^2+BF^2}=\sqrt{20^2+(10\sqrt{3})^2}=10\sqrt{7}\approx10\times2.65=26.5$（千米）.

答：BD 的长度约为 26.5 千米.



（2）如图所示，设甲无人机飞到 M，乙无人机飞到 N 时，两无人机相距 20 千米，连接 MN，过点 M 作 $MT\perp CD$ 于 T，

$\therefore MN=20$ 千米.

由题意得，$\angle BCF=90°-30°=60°$，

$\therefore$ 在 Rt$\triangle FBC$ 中，$BC=\frac{BF}{\sin\angle BCF}=\frac{10\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=20$（千米），

$CF=\frac{BF}{\tan\angle BCF}=\frac{10\sqrt{3}}{\sqrt{3}}=10$（千米），

$\therefore CD=DF+CF=30$ 千米.

由题意可设 $BM=x$ 千米，则 $DN=2x$ 千米，$CM=(20-x)$ 千米.

在 Rt$\triangle CMT$ 中，$CT=CM\cdot\cos\angle MCT=(20-x)\times\frac{1}{2}=\left(10-\frac{1}{2}x\right)$ 千米，

$MT=CM\cdot\sin\angle MCT=(20-x)\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\left(10\sqrt{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)$ 千米，

$\therefore TN=CD-DN-CT=30-2x-\left(10-\frac{1}{2}x\right)=\left(20-\frac{3}{2}x\right)$ 千米.

在 Rt$\triangle MNT$ 中，由勾股定理得 $MN^2=MT^2+NT^2$，

$\therefore 20^2=\left(10\sqrt{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)^2+\left(20-\frac{3}{2}x\right)^2$，

$\therefore x=15-5\sqrt{5}$ 或 $x=15+5\sqrt{5}$（舍去），

$\therefore BM=15-5\sqrt{5}\approx 15-5\times 2.24=3.8$（千米）.

答：甲无人机飞离 B 处约 3.8 千米时，两无人机可以开始相互接收到信号.

16.【解】（1）$\because$ 等腰直角三角形 ABC 中，$\angle A=90°$，$BC=4$，

$\therefore \angle B=\angle C=45°$，$\therefore AB=AC=\dfrac{\sqrt{2}}{2}BC=2\sqrt{2}$.

$\because$ 点 D 和点 N 分别是 AC 和 BC 的中点，

$\therefore AD=\dfrac{1}{2}AC=\sqrt{2}$，$BN=\dfrac{1}{2}BC=2$.

$\because AD=aBN$，$\therefore a=\dfrac{AD}{BN}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

（2）$\because a=\sqrt{2}$，$AD=aBN$，

$\therefore AD=\sqrt{2}BN$.

设 $BN=x$，则 $AD=\sqrt{2}x$，$CN=BC-BN=4-x$，

$\therefore CD=AC-AD=2\sqrt{2}-\sqrt{2}x$.

$\because M$ 是 AB 的中点，

$\therefore AM=BM=\sqrt{2}$.

当以点 C,D,N 为顶点的三角形与 $\triangle BMN$ 相似时，分两种情况：

①$\triangle CDN\backsim\triangle BMN$，则 $\dfrac{CD}{BM}=\dfrac{CN}{BN}$，

$\therefore \dfrac{2\sqrt{2}-\sqrt{2}x}{\sqrt{2}}=\dfrac{4-x}{x}$，

此方程无解，不符合题意.

②$\triangle CND\backsim\triangle BMN$，则 $\dfrac{CN}{BM}=\dfrac{CD}{BN}$，

$\therefore \dfrac{4-x}{\sqrt{2}}=\dfrac{2\sqrt{2}-\sqrt{2}x}{x}$，

解得 $x=3+\sqrt{5}$（不符合题意，舍去）或 $x=3-\sqrt{5}$，

$\therefore BN=3-\sqrt{5}$.

综上，$BN=3-\sqrt{5}$.

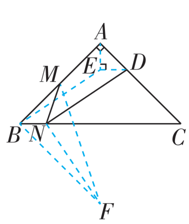
（3）$\because a=\sqrt{2}$，$AD=aBN$，

$\therefore AD=\sqrt{2}BN$.

如图，作 $DE/\!/BC$，$AE\perp DE$ 于点 E，连接 BE，

则 $\angle ADE=\angle C=45°$，$\therefore \angle DAE=45°$，

$\therefore \triangle AED$ 为等腰直角三角形，



$\therefore AD=\sqrt{2}DE=\sqrt{2}AE$，

$\therefore AE=DE=BN$，$\angle BAE=45°$.

又 $\because DE/\!/BN$，

$\therefore$ 四边形 $EDNB$ 为平行四边形，$\therefore BE=DN$.

将 AB 绕点 B 顺时针旋转 90 度得到 BF，连接 NF，MF，

则 $BF=AB=2\sqrt{2}$，$\angle ABF=90°$.

$\because \angle ABC=45°$，$\therefore \angle NBF=45°=\angle BAE$.

又 $\because AB=BF$，$AE=BN$，

$\therefore \triangle AEB\cong\triangle BNF$，

$\therefore BE=NF$，$\therefore DN=NF$，

$\therefore MN+ND=MN+NF\geqslant MF$，

$\therefore$ 当点 N 在线段 MF 上时，$MN+ND$ 的值最小，为 MF 的长.

在 $\mathrm{Rt}\triangle MBF$ 中，$BM=\dfrac{1}{2}AB=\sqrt{2}$，$BF=2\sqrt{2}$，

$\therefore MF=\sqrt{BM^2+BF^2}=\sqrt{10}$，

$\therefore MN+ND$ 的最小值为 $\sqrt{10}$.

B 考点突破练

考点 17　线段、角、相交线与平行线（含命题）

刷基础

1. C　【解析】用 2 个钉子钉木条，则木条被固定在墙上，其运用到的数学原理是两点确定一条直线，故选 C.

2. A　【解析】$\because \angle A=80°$，$\therefore \angle A$ 的补角为 $180°-80°=100°$. 故选 A.

3. C　【解析】$\because AD/\!/BC$，$\angle A=110°$，$\therefore \angle ABC=180°-\angle A=180°-110°=70°$，$\angle D=\angle DBC$. $\because BD$ 平分 $\angle ABC$，$\therefore \angle DBC=\dfrac{1}{2}\angle ABC=\dfrac{1}{2}\times 70°=35°$，$\therefore \angle D=35°$，故选 C.

4. A　【解析】$\because OD$ 平分 $\angle AOC$，$\therefore \angle AOC=2\angle 1=2\times 52°=104°$，$\therefore \angle 2=180°-\angle AOC=180°-104°=76°$. 故选 A.

5. B　【解析】$\because MN/\!/OA$，$\angle MNB=50°$，$\therefore \angle AOB=\angle MNB=50°$. 由题意可知，$OM$ 平分 $\angle AOB$，$\therefore \angle AOM=\angle MOB=\dfrac{1}{2}\angle AOB=25°$，故选 B.

6. D　【解析】当 $a=-2\ 025$ 时，$|-2\ 025|=2\ 025$，即此时不满足 $|a|=a$，$\therefore$ 能说明命题“对于任何一个实数 a，都有 $|a|=a$ 成立”是假命题的一个反例可以是 $a=-2\ 025$，故选 D.

刷易错

7. $70°$ 或 $86°$　【解析】$\because \angle\alpha$ 与 $\angle\beta$ 的两边分别平行，$\therefore$ ①$\angle\alpha=\angle\beta$，$\therefore (2x+10)°=(3x-20)°$，解得 $x=30$，$\therefore \angle\alpha=(2\times 30+10)°=70°$；②$\angle\alpha+\angle\beta=180°$，$\therefore (2x+10)°+(3x-20)°=180°$，解得 $x=38$，$\therefore \angle\alpha=(2\times 38+10)°=86°$. 综上所述，$\angle\alpha$ 的度数为 $70°$ 或 $86°$. 故答案为 $70°$ 或 $86°$.

易错警示

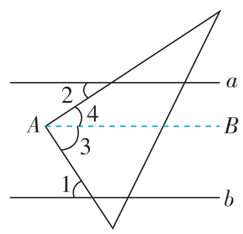
两边分别平行的两个角相等或互补，注意要分两种情况考虑，不要漏解.

刷 提升

1. B 【解析】∵ 这两地之间的最短距离为 8 km,∴ 其他路线都应大于 8 km. ∵ 路线 n 的长度为 $3+3+2=8$(km),∴ 路线 n 所标的数据错误. 故选 B.

2. A 【解析】∵ $AB/\!/CD$,∴ $\angle A=\angle 1=30°$. ∵ $\angle 2=\angle A+\angle 3=70°$,∴ $\angle 3=40°$. 故选 A.

3. C 【解析】如图,过点 A 作 $AB/\!/b$,则 $\angle 3=\angle 1=57°$. ∵ $\angle 3+\angle 4=90°$,∴ $\angle 4=90°-\angle 3=33°$. ∵ $AB/\!/b$,直线 $a/\!/b$,∴ $AB/\!/a$,∴ $\angle 2=\angle 4=33°$,故选 C.



关键点拨

平行线中辅助线的作法

见到拐点作平行线,利用平行线的性质得到角度之间的关系.

4. D 【解析】由题可得,这个真命题为同一平面内,如果两条平行线中的一条直线垂直于第三条直线,那么另一条直线也垂直于这条直线,故选 D.

5. $a=2,b=-2$(答案不唯一) 【解析】当 $a=2,b=-2$ 时,$2^2=(-2)^2$,满足 $a^2=b^2$,不满足 $a=b$,∴ 命题"若 $a^2=b^2$,则 $a=b$"是假命题,故答案为 $a=2,b=-2$(答案不唯一).

刷 素养

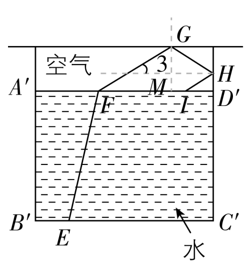
6.【解】(1) ∵ $AD/\!/BC$,∴ $\angle 1+\angle OPD=180°$.

∵ $\angle 1=60°$,∴ $\angle OPD=120°$.

∵ $\angle OPQ=140°$,∴ $\angle 2=\angle OPQ-\angle OPD=20°$.

(2) $HI/\!/FG$. 理由如下:

如图,过点 G 作 $GM\perp$ 镜面,$HM/\!/A'D'$,GM 与 HM 相交于点 M. 由题意得,$\angle FGM=\angle HGM$,$\angle GHM=\angle MHI$. 易得 $GM\perp HM$,∴ $\angle 3+\angle FGM=\angle GHM+\angle HGM=90°$,



∴ $\angle 3=\angle GHM$,∴ $\angle 3=\angle MHI$,∴ $HI/\!/FG$.

考点 18 三角形基本性质

刷 基础

1. A 【解析】∵ $l_1/\!/l_2$,$\angle 1=50°$,∴ $\angle ABC=\angle 1=50°$. ∵ $AB\perp CD$,∴ $\angle BDC=90°$,∴ $\angle 2=180°-90°-50°=40°$,故选 A.

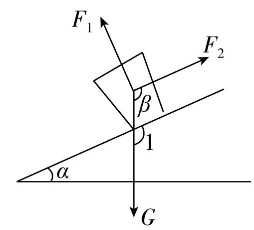
2. D 【解析】A 选项,$2+3=5$,不能组成三角形;B 选项,$3+3=6$,不能组成三角形;C 选项,$2+5<8$,不能组成三角形;D 选项,$2+5>6$,能组成三角形. 故选 D.

关键点拨

三角形的三边关系

两边之和大于第三边,两边之差小于第三边.

3. C 【解析】如图. ∵ 重力 G 的方向竖直向下,∴ 重力 G 与水平方向的夹角为 90°. ∵ 摩擦力 F_2 的方向与斜面平行,$\alpha=24°$,∴ $\beta=\angle 1=\alpha+90°=114°$,故选 C.

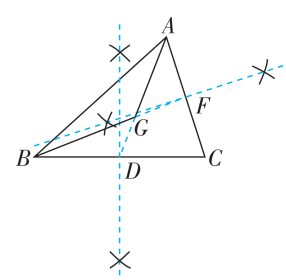


4. C 【解析】∵ 在 $\triangle ACD$ 中,$\angle DAC=30°$,$\angle C=70°$,$\angle ADC=r°$,且 $\angle DAC+\angle C+\angle ADC=180°$,∴ $30°+70°+r°=180°$,∴ $r=80$,∴ $\angle ADC=r°=80°$. ∵ $\angle ADC$ 是 $\triangle ABD$ 的外角,$\angle B=q°$,$\angle BAD=p°$,∴ $\angle ADC=\angle B+\angle BAD=p°+q°$,∴ $p°+q°=80°$,∴ $p+q=80$,∴ $p+q+r=80+80=160$. 故选 C.

5. B 【解析】由作图可得 $BD\perp AC$,∴ 线段 BD 一定是 $\triangle ABC$ 的高线. 故选 B.

6. B 【解析】∵ $S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}\times BC\times AD=12$,$AD=4$,∴ $BC=6$. ∵ AE 是中线,∴ $BE=\dfrac{1}{2}BC=3$,故选 B.

7.【解】(1) 如图所示,点 G 即为所求作.



作法:①作 BC 的垂直平分线交 BC 于点 D;

②作 AC 的垂直平分线交 AC 于点 F;

③连接 AD,BF 相交于点 G,点 G 即为所求.

(2) ∵ G 是 $\triangle ABC$ 的重心,∴ $AG=\dfrac{2}{3}AD$,∴ $\dfrac{S_{\triangle ABG}}{S_{\triangle ABD}}=\dfrac{2}{3}$.

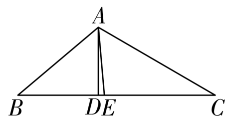
∵ $\triangle ABG$ 的面积等于 5 cm²,∴ $S_{\triangle ABD}=7.5\ \text{cm}^2$.

又∵ D 是 BC 的中点,∴ $S_{\triangle ABC}=2S_{\triangle ABD}=15\ \text{cm}^2$,故答案为 15.

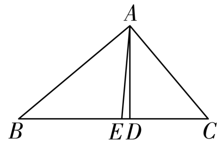
刷 易错

8. 30°或 50° 【解析】①当 $\angle B>\angle C$ 时,如图(1). ∵ $AD\perp BC$,∴ $\angle ADB=90°$. ∵ $\angle B=40°$,∴ $\angle BAD=50°$. ∵ $\angle DAE=5°$,

AE 平分$\angle BAC$，$\therefore\ \angle BAE=\angle CAE=50°+5°=55°$，$\therefore\ \angle BAC=110°$，$\therefore\ \angle C=180°-\angle B-\angle BAC=180°-40°-110°=30°$.



图(1)



图(2)

②当$\angle B<\angle C$时，如图(2). $\because\ AD\perp BC$，$\therefore\ \angle ADB=90°$. $\because\ \angle B=40°$，$\therefore\ \angle BAD=50°$. $\because\ \angle DAE=5°$，AE 平分$\angle BAC$，$\therefore\ \angle BAE=\angle EAC=50°-5°=45°$，$\therefore\ \angle BAC=90°$，$\therefore\ \angle C=180°-\angle B-\angle BAC=180°-40°-90°=50°$. 综上所述，$\angle C=30°$或 $50°$. 故答案为 $30°$或 $50°$.

易错警示

图形形状不确定时需分情况画图，分别计算，避免漏解.

刷 提升

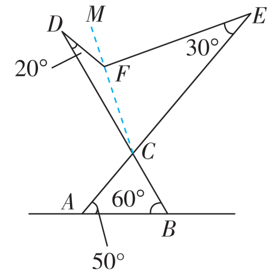
1. B 【解析】由题意得，$\angle EDF=30°$，$\angle ABC=45°$. $\because\ DF/\!/AB$，$\therefore\ \angle AED=\angle FDE=30°$，$\therefore\ \angle EDB=\angle ABC-\angle AED=45°-30°=15°$，故选 B.

2. A 【解析】$\because\ \triangle ABC$ 的周长为 16，$\therefore\ AB+AC+BC=16$. $\because\ AD$ 是 BC 边上的中线，$\therefore\ BD=CD=3$，$\therefore\ BC=6$，$\therefore\ AC=16-AB-BC=16-6-6=4$，$\therefore\ \triangle ABD$ 与$\triangle ACD$ 的周长之差为 $AB+BD+AD-(AC+CD+AD)=AB-AC=6-4=2$，故选 A.

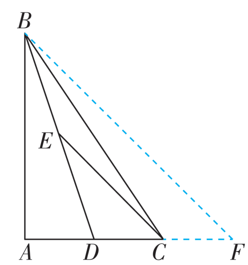
3. A 【解析】$\because\ BD$ 是$\triangle ABC$ 的边 AC 上的中线，$\therefore\ S_{\triangle ABD}=S_{\triangle BCD}=\frac{1}{2}S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\times16=8$. $\because\ AE$ 是$\triangle ABD$ 的边 BD 上的中线，$\therefore\ S_{\triangle ABE}=S_{\triangle ADE}=\frac{1}{2}S_{\triangle ABD}=\frac{1}{2}\times8=4$. $\because\ BF$ 是$\triangle ABE$ 的边 AE 上的中线，$\therefore\ S_{\triangle BEF}=S_{\triangle ABF}=\frac{1}{2}S_{\triangle ABE}=\frac{1}{2}\times4=2$. 由题意可知 ED，CF 均为$\triangle ACE$ 的中线，$\therefore\ S_{\triangle CEF}=S_{\triangle ACF}=\frac{1}{2}S_{\triangle ACE}=S_{\triangle ADE}=4$，$\therefore\ S_{阴影}=S_{\triangle BEF}+S_{\triangle CEF}=2+4=6$. 故选 A.

4. $100°$ 【解析】$\because\ \angle BCD=30°$，$\angle ACB=80°$，$\therefore\ \angle ACD=50°$. $\because\ CD$ 是边 AB 上的高，$\therefore\ \angle ADC=90°$，$\therefore\ \angle DAC=40°$. $\because\ AE$ 是$\angle CAB$ 的平分线，$\therefore\ \angle CAE=\frac{1}{2}\angle DAC=20°$，$\therefore\ \angle AEB=\angle CAE+\angle ACB=20°+80°=100°$，故答案为 $100°$.

5. 减少　10 【解析】连接 CF，并延长至点 M，如图所示. 在$\triangle ABC$ 中，$\angle CAB=50°$，$\angle CBA=60°$，$\therefore\ \angle ACB=180°-\angle CAB-\angle CBA=180°-50°-60°=70°$，$\therefore\ \angle DCE=\angle ACB=70°$. $\because\ \angle DFM=\angle DCF+\angle D$，$\angle EFM=\angle ECF+\angle E$，$\therefore\ \angle EFD=\angle DCF+\angle ECF+\angle D+\angle E=\angle DCE+\angle D+\angle E$，即 $110°=70°+\angle D+30°$，$\therefore\ \angle D=10°$，$\therefore\ 20°-10°=10°$，$\therefore$ 题图中$\angle D$ 应减少 10 度. 故答案为减少，10.



6. $4\sqrt{2}$ 【解析】如图，延长 DC 至 F，使 $CF=DC$，连接 BF. $\because\ DE=EB$，$DC=CF$，$\therefore\ CE$ 是$\triangle DBF$ 的中位线，$\therefore\ BF=2CE=2\times4=8$. $\because\ DC=CF$，$AD=DC$，$\therefore\ AF=3CD$. $\because\ AB=3CD$，$\therefore\ AF=AB$. $\because\ \angle A=90°$，$\therefore\ AB=AF=\frac{\sqrt{2}}{2}BF=4\sqrt{2}$，故答案为 $4\sqrt{2}$.



刷 素养

7. $\frac{1}{3^n}m$ 【解析】设$\angle E_1AD=\alpha$，$\angle E_1BD=\beta$，则$\angle CAB=3\alpha$，$\angle CBD=3\beta$. $\because\ \angle E_1BD$，$\angle CBD$ 分别是$\triangle ABE_1$，$\triangle ABC$ 的外角，$\therefore\ \angle E_1BD=\angle E_1AD+\angle E_1$，$\angle CBD=\angle CAB+\angle C$，即 $\beta=\alpha+\angle E_1$，$3\beta=3\alpha+\angle C$，$\therefore\ \angle E_1=\frac{1}{3}\angle C$. 同理可求，$\angle E_2=\frac{1}{3}\angle E_1$，$\therefore\ \angle E_2=\left(\frac{1}{3}\right)^2\angle C$，…，$\therefore\ \angle E_n=\left(\frac{1}{3}\right)^n\angle C$，即$\angle E_n=\frac{1}{3^n}m°$，故答案为$\frac{1}{3^n}m$.

考点 19　等腰（边）三角形

刷 基础

1. B 【解析】$\because$ 点 D 在 BC 上，$\therefore\ \angle ADB+\angle ADC=180°$. $\because\ \angle ADB=\angle ADC$，$\therefore\ 2\angle ADC=180°$，$\therefore\ \angle ADC=90°$，$\therefore\ AD\perp BC$，故 A 不符合题意. $\because\ AB=AC$，$\therefore\ \angle B=\angle C$. $\because\ \angle B=\angle C$ 与点 D 所在的位置没有关系，$\therefore$ 由$\angle B=\angle C$ 不能说明 $AD\perp BC$，故 B 符合题意. $\because\ AB=AC$，$BD=CD$，$\therefore\ AD\perp BC$，故 C 不符合题意. $\because\ AB=AC$，AD 平分$\angle BAC$，$\therefore\ AD\perp BC$，故 D 不符合题意. 故选 B.

2. C 【解析】$\because\ AB=BC$，$\angle A=20°$，$\therefore\ \angle ACB=\angle A=20°$，$\therefore\ \angle CBD=\angle A+\angle ACB=40°$. $\because\ BC=CD$，$\therefore\ \angle CDB=\angle CBD=40°$，$\therefore\ \angle DCF=\angle A+\angle CDA=20°+40°=60°$. $\because\ CD=DF$，$\therefore\ \angle CFD=\angle DCF=60°$，$\therefore\ \angle EDF=\angle A+\angle AFD=20°+60°=$

$80°$. $\because DF=EF$, $\therefore \angle FED=\angle EDF=80°$, $\therefore \angle GFE=\angle A+\angle AEF=20°+80°=100°$. 故选 C.

3. C 【解析】$\because \angle DAC=\angle ADC, AC=3$, $\therefore DC=AC=3$. $\because \angle ADC$ 是 $\triangle ABD$ 的外角, $\therefore \angle ADC=\angle B+\angle DAB$. 又 $\because \angle ADC=2\angle B$, $\therefore 2\angle B=\angle B+\angle DAB$, $\therefore \angle B=\angle DAB$, $\therefore BD=AD=2$, $\therefore BC=BD+CD=2+3=5$. 故选 C.

4. 100 【解析】因为等腰三角形的一个底角为 $40°$,所以其顶角为 $180°-40°\times2=100°$. 故答案为 100.

5. 5 【解析】$\because \triangle BCE$ 的周长为 8, $\therefore BE+EC+BC=8$. $\because AB$ 的垂直平分线 DE 交 AB 于点 D,交 AC 于点 E, $\therefore AE=BE$, $\therefore AE+EC+BC=8$,即 $AC+BC=8$. 又 $\because AC-BC=2$, $\therefore AC=5$, $BC=3$. $\because AB=AC$, $\therefore AB=5$. 故答案为 5.

6. C 【解析】$\because$ 四边形 $ABCD$ 是矩形, $\therefore AD\parallel BC$, $\therefore \angle AEB=\angle EBC$. $\because \triangle EBC$ 是等边三角形, $\therefore \angle EBC=60°$, $\therefore \angle AEB=60°$,故选 C.

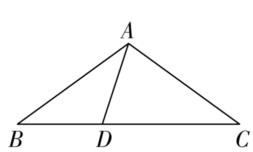
7. D 【解析】$\because$ 三角形 ABC 是等边三角形, $AD\perp BC$, $\therefore \angle ABC=60°$, $BD=CD$, $\therefore BE=CE$, $\therefore \angle EBD=\angle ECD=20°$, $\therefore \angle ABE=\angle ABC-\angle EBD=40°$. 故选 D.

8. 3 【解析】$\because \triangle ABC$ 为等边三角形, BD 为 $\triangle ABC$ 的高, $\therefore AD=CD$, $AC=BC$. $\because CE=CD=1$, $\therefore AC=2CD=2$, $\therefore BC=2$, $\therefore BE=BC+CE=2+1=3$. 故答案为 3.

刷 易错

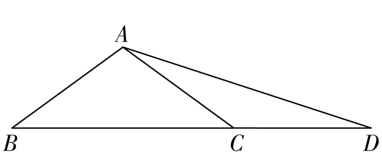
9. $72°$或 $18°$ 【解析】在 $\triangle ABC$ 中, $AB=AC$, $\therefore \angle ABC=\angle ACB$. $\because \angle ABC+\angle ACB+\angle BAC=180°$, $\angle BAC=3\angle ABC$, $\therefore 5\angle ABC=180°$, $\therefore \angle ABC=\angle ACB=36°$. $\because$ 点 D 在直线 BC 上, $\therefore$ 有以下两种情况:

①当点 D 在线段 BC 上时,如图(1). $\because CA=CD$, $\angle ACB=36°$, $\therefore \angle ADC=\frac{1}{2}(180°-\angle ACB)=72°$.



图(1)

②当点 D 在 BC 的延长线上时,如图(2).



图(2)

$\because CA=CD$, $\therefore \angle ADC=\angle CAD$. $\because \angle ACB$ 是 $\triangle ACD$ 的外角, $\therefore \angle ACB=\angle ADC+\angle CAD=2\angle ADC=36°$, $\therefore \angle ADC=18°$.

综上所述, $\angle ADC$ 的度数为 $72°$或 $18°$. 故答案为 $72°$或 $18°$.

易错警示

点的位置不确定时,等腰三角形形状未知,需画图分类讨论,避免漏解.

刷 提升

1. B 【解析】$\because AB=AC$, AD 平分 $\angle BAC$, $\therefore$ 点 D 是 BC 的中点. $\because$ 点 E 是边 AC 的中点, $\therefore DE$ 是 $\triangle ABC$ 的中位线, $\therefore DE=\frac{1}{2}AB$. $\because DE=2$, $\therefore AB=2DE=4$,故选 B.

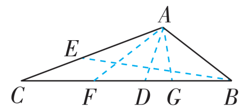
关键点拨

中位线的应用

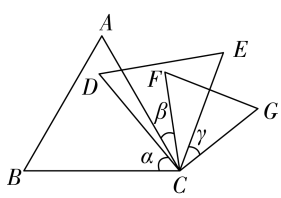
由三角形两边的中点得到中位线,再根据中位线与第三边的数量关系求解.

2. A 【解析】由作图可知, BD 是 EF 的垂直平分线, $\therefore BG\perp AC$. $\because \triangle ABC$ 是等边三角形, $\therefore \angle ABC=60°$, BG 平分 $\angle ABC$, $\therefore \angle ABG=\frac{1}{2}\angle ABC=30°$,故选项 A 正确. $\because \angle ABG=30°$, $\therefore \cos\angle ABG=\frac{BG}{AB}=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\therefore 2BG=\sqrt{3}AB$,故选项 C 错误. 对于选项 B、D,不能证明一定成立,不符合题意. 故选 A.

3. B 【解析】如图所示,当 $AB=AF=3$, $BA=BD=3$, $AB=AE=3$, $BG=AG$ 时,都能得到符合题意的等腰三角形. 故选 B.



4. B 【解析】如图. $\because \triangle ABC$, $\triangle DEC$, $\triangle FGC$ 都是等边三角形, $\therefore \angle ACB=\angle DCE=\angle FCG=60°$, $\therefore \alpha=\angle ACB-\angle ACD=60°-\angle ACD$, $\beta=\angle DCE-\angle ACD-\angle ECF=60°-\angle ACD-\angle ECF$, $\gamma=\angle FCG-\angle ECF=60°-\angle ECF$, $\therefore \alpha-\beta+\gamma=60°-\angle ACD-(60°-\angle ACD-\angle ECF)+60°-\angle ECF=60°$. 故选 B.

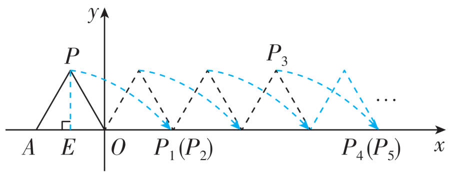


5. 10 【解析】$\because \angle B=50°$, $\angle C=30°$, $\therefore \angle BAC=180°-50°-30°=100°$. 根据题意得, AF 平分 $\angle BAC$, $\therefore \angle BAF=\frac{1}{2}\angle BAC=50°$. $\because AD$ 为高, $\therefore \angle BDA=90°$, $\therefore \angle BAD=180°-50°-90°=40°$, $\therefore \angle DAF=\angle BAF-\angle BAD=50°-40°=10°$,故答案为 10.

6. 【证明】$\because AD\parallel BC$, $\therefore \angle EAD=\angle B$. $\because \angle B=\angle D$, $\therefore \angle D=\angle EAD$, $\therefore BE\parallel CD$. $\because \angle E=60°$, $\therefore \angle ECD=\angle E=60°$. 又 $\because CE$ 平分 $\angle BCD$, $\therefore \angle BCE=\angle ECD=60°$, $\therefore \angle B=60°$, $\therefore \angle E=\angle B=\angle BCE=60°$, $\therefore \triangle BCE$ 为等边三角形.

刷 素养

7. 2 008 【解析】如图所示,过点 P 作 x 轴的垂线,垂足为 E.



$\because$ △OAP 是边长为 1 的正三角形,$\therefore$ $OE=\dfrac{1}{2}$. 观察图形结合翻转的方法可以得出 P_1,P_2 的横坐标为 1,P_3 的横坐标为 2.5,P_4,P_5 的横坐标为 4,P_6 的横坐标为 5.5,…,以此类推下去,每 3 次翻转为一个循环,每个循环内点 P 的横坐标依次增加 1.5,0,1.5. $\because$ 2 008÷3=669……1,$\therefore$ 点 $P_{2\,008}$ 的横坐标为$-\dfrac{1}{2}+(1.5+0+1.5)\times669+1.5=2\,008$,故答案为 2 008.

考点 20 直角三角形

刷基础

1. C 【解析】由题意得,$AB=6-1=5$(cm). $\because$ $\angle ACB=90°$,D 为边 AB 的中点,$\therefore$ $CD=\dfrac{1}{2}AB=2.5$ cm,故选 C.

2. B 【解析】$\because$ $\angle C=90°$,$\angle B=30°$,$\therefore$ $\angle CAB=60°$. 由作图可知,AD 平分 $\angle BAC$,$\therefore$ $\angle CAD=\angle DAB=30°$,$\therefore$ $CD=\dfrac{1}{2}AD$,$\angle B=\angle BAD$,$\therefore$ $AD=BD$,$\therefore$ $CD=\dfrac{1}{2}BD$,$\therefore$ $\dfrac{S_{\triangle ACD}}{S_{\triangle ABD}}=\dfrac{\frac{1}{2}CD\cdot AC}{\frac{1}{2}BD\cdot AC}=\dfrac{CD}{BD}=\dfrac{1}{2}$. $\because$ △ACD 的面积为 8,$\therefore$ △ABD 的面积为 $2\times8=16$. 故选 B.

3. 70° 【解析】$\because$ $BE\perp AF$ 于点 E,$CD\perp AF$ 交 AF 的延长线于点 D,$\therefore$ $\angle AEB=90°$,$\angle ADC=90°$,$\therefore$ $\angle BAE=90°-\angle ABE=90°-20°=70°$. $\because$ $\angle CAB=\angle CAD+\angle BAE=90°$,$\therefore$ $\angle CAD=90°-70°=20°$,$\therefore$ $\angle ACD=90°-20°=70°$. 故答案为 70°.

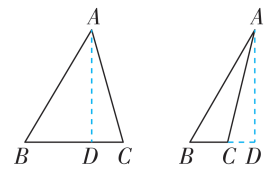
4. B 【解析】由题意可知,中间小正方形的边长为 $m-n$,$\therefore$ $(m-n)^2=5$,即 $m^2+n^2-2mn=5$. ① $\because$ $(m+n)^2=21$,$\therefore$ $m^2+n^2+2mn=21$. ② ①+②,得 $2(m^2+n^2)=26$,$\therefore$ 利用勾股定理易得大正方形面积为 $m^2+n^2=13$. 故选 B.

5. D 【解析】A 选项,$\because$ $\angle A+\angle B+\angle C=180°$,$\angle A+\angle B=90°$,$\therefore$ $\angle C=180°-(\angle A+\angle B)=90°$,$\therefore$ △ABC 是直角三角形,不符合题意. B 选项,$\because$ $a:b:c=5:12:13$,$\therefore$ 设 $a=5x$,$b=12x$,$c=13x$,$\therefore$ $a^2+b^2=(5x)^2+(12x)^2=(13x)^2=c^2$,$\therefore$ △ABC 是直角三角形,不符合题意. C 选项,$\because$ $a^2+b^2=c^2$,$\therefore$ △ABC 是直角三角形,不符合题意. D 选项,$\because$ $\angle A:\angle B:\angle C=3:4:5$,$\therefore$ 设 $\angle A=3k$,$\angle B=4k$,$\angle C=5k$. $\because$ $\angle A+\angle B+\angle C=180°$,$\therefore$ $3k+4k+5k=180°$,解得 $k=15°$,$\therefore$ $5k=75°\neq90°$,$\therefore$ △ABC 不是直角三角形,符合题意. 故选 D.

6. 2.4 【解析】$\because$ 长为 3 m 的梯子靠在墙上,梯子的底端离墙脚线的距离为 1.8 m,$\therefore$ $h=\sqrt{3^2-1.8^2}=2.4$(m),故答案为 2.4.

刷易错

7. 7 或 5 【解析】$\because$ AD 为 BC 边上的高,$\therefore$ $AD\perp BC$. 在 Rt△ABD 中,$\angle ABC=60°$,$AD=6\sqrt{3}$,$\therefore$ $BD=6$. 如图(1),当点 D 在 BC 上时,$BC=BD+CD=6+1=7$. 如图(2),当点 D 在 BC 的延长线上时,$BC=BD-CD=6-1=5$. 故答案为 7 或 5.



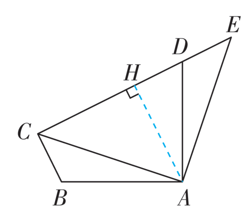
图(1)　　图(2)

易错警示

点 D 的位置不确定,需画图分类讨论,避免漏解.

刷提升

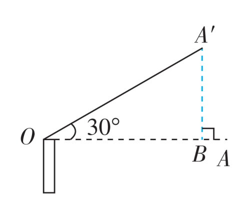
1. A 【解析】由旋转得 △$ABC\cong$△ADE,$\angle CAE=90°$,$\therefore$ $AC=AE$,$DE=BC=1$,$\therefore$ △ACE 是等腰直角三角形. $\because$ 点 D 在线段 CE 上,$CD=3$,$\therefore$ $CE=CD+DE=3+1=4$. 过点 A 作 $AH\perp CE$ 于点 H,如图,



$\therefore$ $AH=CH=HE=\dfrac{1}{2}CE=2$,$\therefore$ $HD=HE-DE=2-1=1$,$\therefore$ $AD=\sqrt{AH^2+HD^2}=\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}$,故选 A.

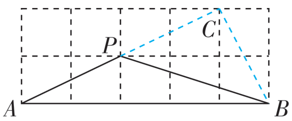
2. C 【解析】根据题意可知 $AB=AD$,$BC/\!/EF$,$CE\perp EF$,$BF\perp EF$,$\therefore$ $\angle ACB=90°$,$CE=BF=8$ cm. 设 $AB=AD=x$ cm,则 $AC=AD+DE-CE=x+6-8=(x-2)$ cm. 在 Rt△ABC 中,$\angle ACB=90°$,$\therefore$ $AB^2=AC^2+BC^2$,即 $x^2=(x-2)^2+10^2$,解得 $x=26$. 故选 C.

3. $\dfrac{3}{2}$ 【解析】过点 A' 作 $A'B\perp AO$ 于点 B,如图所示. $\because$ $\angle A'BO=90°$,$\angle A'OA=30°$,$A'O=AO=3$ 米,$\therefore$ $A'B=\dfrac{1}{2}A'O=\dfrac{1}{2}\times3=\dfrac{3}{2}$(米),故答案为 $\dfrac{3}{2}$.



4. 45° 【解析】如图,延长 AP,交网格线于点 C,连接 BC. 设小正方形的边长均为 1. 在△PCB 中,$PC^2=1^2+2^2=5$,$BC^2=1^2+$

$2^2=5$, $PB^2=1^2+3^2=10$, ∴ $PC^2+BC^2=PB^2$, $PC=BC$, ∴ $\triangle PCB$ 为等腰直角三角形,且 $\angle PCB=90°$, ∴ $\angle BPC=45°$, ∴ $\angle PAB+\angle PBA=\angle BPC=45°$. 故答案为 45°.



5. $\frac{7}{8}$ 【解析】∵ 四边形 $ABCD$ 是矩形, ∴ $CD=AB=4$, $\angle C=90°$. ∵ M 是 BC 的中点, ∴ $CM=\frac{1}{2}BC=\frac{1}{2}\times6=3$. 由折叠的性质得 $MF=DF$. 设 $FC=x$, 则 $MF=FD=4-x$. ∵ $MF^2=MC^2+FC^2$, ∴ $(4-x)^2=3^2+x^2$, ∴ $x=\frac{7}{8}$, ∴ $FC=\frac{7}{8}$, 故答案为 $\frac{7}{8}$.

刷 素养

6.【解】(1) 观察题表中的等式可知, $(4^2-1)^2+8^2=(4^2+1)^2$, 故答案为 4^2+1.

(2) 用含 n (n 为正整数,且 $n>1$) 的等式表示题中的规律: $(n^2-1)^2+(2n)^2=(n^2+1)^2$, 故答案为 $(n^2-1)^2+(2n)^2$.

(3) 由(2)可知 $(n^2-1)^2+(2n)^2=(n^2+1)^2$ (n 为正整数,且 $n>1$), 故存在以 n^2-1, $2n$ 为直角边长, n^2+1 为斜边长的直角三角形, ∴ 当有一个直角边长为 14 的直角三角形,且它的三边长为勾股数时, $2n=14$, 解得 $n=7$, ∴ 该直角三角形的另一条直角边长是 $7^2-1=48$, ∴ 这个直角三角形的面积为 $\frac{1}{2}\times14\times48=336$.

重难专题 11 特殊三角形的分类讨论

刷 难关

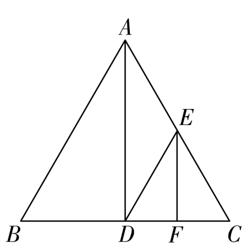
1. $\sqrt{3}$ 或 $2\sqrt{3}+3$ 或 $2\sqrt{3}-3$ 【解析】∵ $\angle BAC=60°$, $AB=BC=4$, ∴ $\triangle ABC$ 是等边三角形, ∴ $AB=AC=4$, $\angle C=60°$. 又∵ $AD\perp BC$, ∴ $\angle DAC=30°$, $CD=BD=\frac{1}{2}BC=2$, ∴ $AD=\sqrt{AC^2-DC^2}=2\sqrt{3}$. ∵ $\triangle ADE$ 是等腰三角形,点 E 是直线 AC 上的动点, ∴ 分三种情况进行讨论:

①当 $AE=DE$ 时,点 E 在线段 AC 上,如图(1),

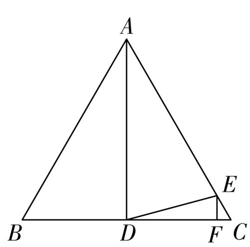
则 $\angle EAD=\angle EDA=30°$, ∴ $\angle EDC=60°=\angle C$,

∴ $\triangle EDC$ 为等边三角形, ∴ $CE=CD=2$.

∵ $EF\perp BC$, ∴ 在 Rt$\triangle EFC$ 中, $EF=CE\cdot\sin C=\sqrt{3}$.



图(1)



图(2)

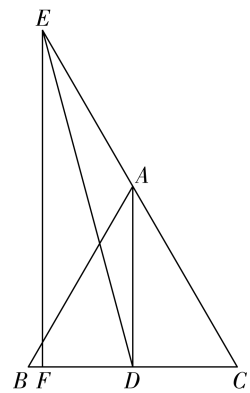
②当 $AD=AE=2\sqrt{3}$, 点 E 在线段 AC 上时,如图(2),

则 $EC=AC-AE=4-2\sqrt{3}$.

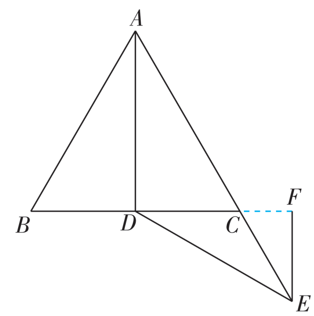
∵ $EF\perp BC$, ∴ 在 Rt$\triangle EFC$ 中, $EF=CE\cdot\sin C=(4-2\sqrt{3})\times\frac{\sqrt{3}}{2}=2\sqrt{3}-3$.

当 $AD=AE=2\sqrt{3}$, 点 E 在射线 CA 上时,如图(3),则 $CE=AC+AE=4+2\sqrt{3}$.

∵ $EF\perp BC$, ∴ 在 Rt$\triangle EFC$ 中, $EF=CE\cdot\sin C=(4+2\sqrt{3})\times\frac{\sqrt{3}}{2}=2\sqrt{3}+3$.



图(3)



图(4)

③当 $AD=DE=2\sqrt{3}$ 时,点 E 在射线 AC 上,如图(4),

则 $\angle DAE=\angle DEA=30°$, ∴ $\angle ADE=120°$,

∴ $\angle CDE=\angle ADE-\angle ADC=30°$.

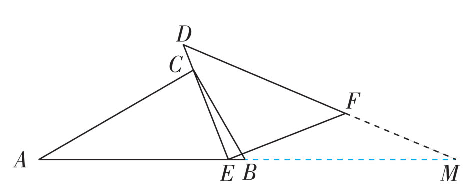
∵ $EF\perp BC$, ∴ 在 Rt$\triangle DFE$ 中, $EF=\frac{1}{2}DE=\sqrt{3}$.

综上,当 $\triangle ADE$ 是等腰三角形时, EF 的长为 $\sqrt{3}$ 或 $2\sqrt{3}+3$ 或 $2\sqrt{3}-3$. 故答案为 $\sqrt{3}$ 或 $2\sqrt{3}+3$ 或 $2\sqrt{3}-3$.

2. 15°或 82.5° 【解析】根据题意可知 $\angle DFE=45°$, $\angle DEF=90°$, $\angle A=30°$.

①当 $EM=FM$ 时, $\angle MEF=\angle DFE=45°$, ∴ $\angle CEB=90°-45°=45°$. ∵ $\angle A+\angle ACE=\angle CEB$, ∴ $\angle ACE=45°-30°=15°$.

②当 $EF=FM$ 时,如图, ∴ $\angle FEM=\angle M$, $\angle MEF+\angle M=45°$, ∴ $\angle MEF=22.5°$, ∴ $\angle DEM=90°+22.5°=112.5°$. ∵ $\angle A+\angle ACE=\angle DEM$, ∴ $\angle ACE=112.5°-30°=82.5°$.



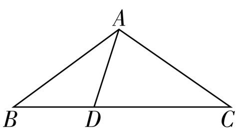
③当 $EF=EM$ 时,易知此种情况不成立.

综上所述, $\angle ACE$ 的度数为 15°或 82.5°. 故答案为 15°或 82.5°.

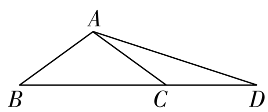
3. 72°或 18°　【解析】在△ABC 中,$AB=AC$,∴ $\angle ABC=\angle ACB$. ∵ $\angle ABC+\angle ACB+\angle BAC=180°$, $\angle BAC=3\angle ABC$, ∴ $5\angle ABC=180°$,∴ $\angle ABC=\angle ACB=36°$. ∵ 点 D 在直线 BC 上,∴ 有以下两种情况:

①当点 D 在线段 BC 上时,如图(1),

∵ $CA=CD$, $\angle ACB=36°$,∴ $\angle ADC=\frac{1}{2}(180°-\angle ACB)=72°$;



图(1)



图(2)

②当点 D 在 BC 的延长线上时,如图(2),

∵ $CA=CD$,∴ $\angle ADC=\angle CAD$,∴ $\angle ACB$ 是△ACD 的外角,

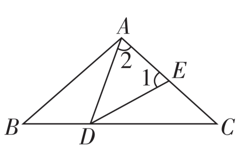
∴ $\angle ACB=\angle ADC+\angle CAD=2\angle ADC=36°$,∴ $\angle ADC=18°$.

综上,$\angle ADC$ 的度数为 72°或 18°. 故答案为 72°或 18°.

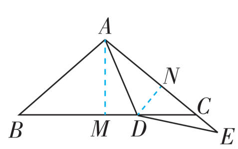
4. 2 或 1　【解析】分以下两种情况:

①当点 D 是靠近点 B 的三等分点时,点 E 在线段 AC 上,如图(1). ∵ $BC=6$,∴ $BD=\frac{1}{3}BC=2$, $CD=4$. ∵ $AB=AC=4$, ∴ $\angle B=\angle C$, $AB=AC=CD=4$,∴ $\angle CDA=\angle 2$. ∵ $DE=DA$, ∴ $\angle 1=\angle 2$,∴ $\angle CDA=\angle 1$. ∵ $\angle CDA+\angle ADB=180°$, $\angle 1+\angle DEC=180°$,∴ $\angle ADB=\angle DEC$. 在△ADB 和△DEC 中,

$\begin{cases}\angle B=\angle C,\\ \angle ADB=\angle DEC,\\ AB=CD,\end{cases}$ ∴ △ADB≌△DEC(AAS),∴ $BD=CE=2$.



图(1)



图(2)

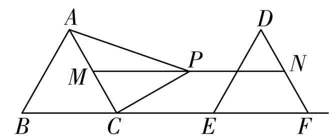
②当点 D 是靠近点 C 的三等分点时,点 E 在 AC 的延长线上,过点 A 作 $AM\perp BC$ 于点 M,过点 D 作 $DN\perp AE$ 于点 N,如图(2),∴ $CD=\frac{1}{3}BC=2$. ∵ $AB=AC=4$, $AM\perp BC$, $BC=6$, ∴ $CM=\frac{1}{2}BC=3$. 在 Rt△ACM 中, $\cos\angle ACB=\frac{CM}{AC}=\frac{3}{4}$,在 Rt△$CDN$ 中, $\cos\angle ACB=\frac{CN}{CD}=\frac{CN}{2}$,∴ $\frac{CN}{2}=\frac{3}{4}$,∴ $CN=\frac{3}{2}$, ∴ $AN=AC-CN=4-\frac{3}{2}=\frac{5}{2}$. ∵ $DE=DA$, $DN\perp AC$,∴ $EN=AN=\frac{5}{2}$,∴ $CE=EN-CN=\frac{5}{2}-\frac{3}{2}=1$.

综上,CE 的长为 2 或 1. 故答案为 2 或 1.

5. 4 或 8　【解析】由题可知,分两种情况:

①当$\angle APC=90°$时,∵ $\angle APC=90°$, M 为 AC 的中点,∴ $PM=AM=CM=\frac{1}{2}AC=2$. ∵ 点 P 是线段 MN 的中点,∴ $MN=2PM=4$. 由平移的性质可知,$BE=MN=4$.

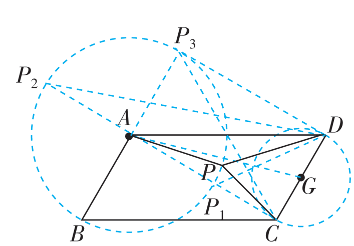
②当$\angle ACP=90°$时,如图所示.



∵ △ABC 是等边三角形,∴ $\angle ACB=60°$. 由题知 $MN/\!/BF$, ∴ $\angle PMC=\angle ACB=60°$,∴ $\angle MPC=30°$. ∵ M 为 AC 的中点, $AC=4$,∴ $CM=2$. 在 Rt△MCP 中,$\angle MCP=90°$, $\angle MPC=30°$, ∴ $PM=2CM=4$. ∵ 点 P 是线段 MN 的中点,∴ $MN=8$. 由平移的性质可知,$BE=MN=8$.

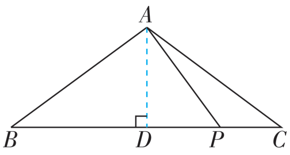
综上,$BE=4$ 或 8. 故答案为 4 或 8.

6. 90°或 180°　【解析】由题意可知,点 P 在以 A 为圆心,AB 长为半径的圆上运动,如图,延长 BA 与⊙A 交于 P_3,连接 P_3C,连接 CA 并延长交⊙A 于点 P_1, P_2. ∵ $P_3B=2AB=BC$, $\angle B=60°$,∴ △P_3BC 为等边三角形,∴ $AC\perp P_3B$. ∵ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,∴ $AB/\!/CD$, $AB=CD$,∴ $CD\perp AC$,∴ $\angle ACD=90°$. 当点 P 在直线 AC 上时,$\angle PCD=90°$,当点 P 位于 P_1 的位置时,连接 P_1D,△P_1CD 是直角三角形,此时 $\alpha_1=90°$;当点 P 位于 P_2 的位置时,连接 P_2D,△P_2CD 是直角三角形,此时 $\alpha_2=270°$(不符合题意,舍去). 连接 P_3D. ∵ $AP_3/\!/CD$, $AP_3=AB=CD$,∴ 四边形 $ACDP_3$ 为平行四边形,∴ $\angle P_3DC=\angle P_3AC=90°$,∴ 点 P 运动到 P_3 时符合题意,此时 $\alpha_3=180°$. 记 CD 的中点为 G,以 G 为圆心,GC 长为半径作⊙G,连接 AG. ∵ $\angle ACG=90°$,∴ 在 Rt△ACG 中,$AG=\sqrt{AC^2+CG^2}=\sqrt{BC^2-AB^2+CG^2}=\sqrt{(2CD)^2-CD^2+\left(\frac{1}{2}CD\right)^2}=\frac{\sqrt{13}}{2}CD>\frac{3}{2}CD$,∴ ⊙$A$ 与⊙G 相离,∴ $\angle DPC<90°$. 故答案为 90°或 180°.

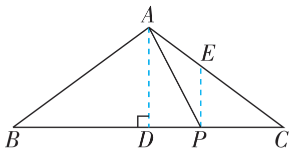


7. $\frac{25}{4}$或$\frac{11}{2}$　【解析】如图,过点 A 作 $AD\perp BC$ 于点 D. ∵ $AB=AC=5$, $BC=8$,∴ $BD=CD=4$, $\angle B=\angle C$,∴ $AD=3$.

如图(1),当 $\angle APC-\angle C=90°$ 时,$\angle APC-\angle B=90°$,则 $\angle BAP=90°$,此时 $\cos B=\frac{AB}{BP}$,∴ $BP=\frac{AB}{\cos B}=\frac{5}{\frac{4}{5}}=\frac{25}{4}$.



图(1)



图(2)

如图(2),当$\angle APC-\angle PAC=90°$时,作$PE/\!/AD$交$AC$于点$E$,则$\angle EPC=90°$. $\because$ $\angle APC-\angle APE=\angle EPC=90°$,$\therefore$ $\angle PAE=\angle APE$,$\therefore$ $EA=EP$. 设$EA=EP=x$,则$EC=5-x$. $\because$ $PE/\!/AD$,$\therefore$ $\triangle ADC\backsim\triangle EPC$,$\therefore$ $\frac{AD}{EP}=\frac{AC}{EC}$,即$\frac{3}{x}=\frac{5}{5-x}$,$\therefore$ $x=\frac{15}{8}$,$\therefore$ $EP=\frac{15}{8}$,$\therefore$ $PC=\frac{EP}{\tan C}=\frac{\frac{15}{8}}{\frac{3}{4}}=\frac{5}{2}$,$\therefore$ $BP=BC-PC=8-\frac{5}{2}=\frac{11}{2}$.

由题易知不存在$\angle PAC-\angle C=90°$,$\angle PAC-\angle APC=90°$,$\angle C-\angle CAP=90°$及$\angle C-\angle CPA=90°$的情况. 故$BP$的长为$\frac{25}{4}$或$\frac{11}{2}$.

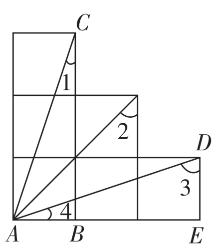
考点 21　全等三角形

刷基础

1. B　【解析】在$\triangle AOB$和$\triangle COD$中,$\begin{cases}OA=OC,\\ \angle AOB=\angle COD,\\ OB=OD,\end{cases}$

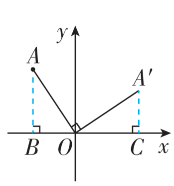
$\therefore$ $\triangle AOB\cong\triangle COD$(SAS). 故选 B.

2. C　【解析】如图,在$\triangle ABC$和$\triangle DEA$中,$\begin{cases}AB=DE,\\ \angle ABC=\angle E=90°,\\ BC=AE,\end{cases}$



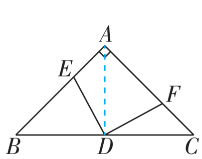
$\therefore$ $\triangle ABC\cong\triangle DEA$(SAS),$\therefore$ $\angle 1=\angle 4$. $\because$ $\angle 3+\angle 4=90°$,$\therefore$ $\angle 1+\angle 3=90°$. 由图易得$\angle 2=45°$,$\therefore$ $\angle 1+\angle 2+\angle 3=135°$. 故选 C.

3. B　【解析】如图,画出线段OA绕点O顺时针旋转$90°$后得到的线段OA',分别过点A和点A'作x轴的垂线,垂足分别为B,C. $\because$ 点A的坐标为$(-4,6)$,$\therefore$ $OB=4$,$AB=6$. $\because$ 将线段OA绕点O顺时针旋转$90°$得到OA',$\therefore$ $OA=OA'$,$\angle AOA'=90°$,$\therefore$ $\angle AOB=90°-\angle A'OC=\angle OA'C$,



$\therefore$ $\triangle AOB\cong\triangle OA'C$(AAS),$\therefore$ $A'C=OB=4$,$OC=AB=6$,$\therefore$ 点A'的坐标为$(6,4)$,故选 B.

4. C　【解析】如图,连接AD. $\because$ $\angle BAC=90°$,$AB=AC=6$,D为边BC的中点,$\therefore$ $AD=BD=CD$,$\angle BAD=\angle C=45°$,$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\times6\times6=18$. 在$\triangle ADE$和$\triangle CDF$中,$\begin{cases}AD=CD,\\ \angle BAD=\angle C,\\ AE=CF,\end{cases}$ $\therefore$ $\triangle ADE\cong\triangle CDF$(SAS),$\therefore$ $S_{\triangle ADE}=S_{\triangle CDF}$,



$\therefore$ $S_{四边形AEDF}=S_{\triangle AED}+S_{\triangle ADF}=S_{\triangle CDF}+S_{\triangle ADF}=S_{\triangle ADC}=\frac{1}{2}S_{\triangle ABC}=9$,

故选 C.

5. 100°　【解析】$\because$ $\triangle ABC\cong\triangle CDE$,$\therefore$ $\angle ACB=\angle CED=45°$. $\because$ $\angle D=35°$,$\therefore$ $\angle DCE=180°-\angle CED-\angle D=180°-45°-35°=100°$,故答案为 100°.

6. 【发现结论】【解】结论 1:$\because$ BD是$\angle ABC$的平分线,BD的延长线交外角$\angle CAM$的平分线于点E,$\therefore$ $\angle MAE=\angle CAE=\frac{1}{2}\angle MAC$,$\angle ABE=\angle CBE=\frac{1}{2}\angle ABC$,$\therefore$ $\angle AEB=\angle MAE-\angle ABE=\frac{1}{2}\angle MAC-\frac{1}{2}\angle ABC$.

又$\because$ $\angle ACB=\angle MAC-\angle ABC$,$\therefore$ $\angle AEB=\frac{1}{2}\angle ACB$. 故答案为$\frac{1}{2}$.

结论 2:$\because$ $\angle ACB=90°$,由结论 1 得,$\angle AEB=\frac{1}{2}\angle ACB$,

$\therefore$ $\angle AEB=\frac{1}{2}\times90°=45°$.

$\because$ $EG\perp AF$,$\therefore$ $\angle AEG=90°$,$\therefore$ $\angle GEB=\angle AEG-\angle AEB=90°-45°=45°$,$\therefore$ $\angle AEB=\angle GEB$.

$\because$ BD是$\angle ABC$的平分线,$\therefore$ $\angle ABE=\angle GBE$.

在$\triangle AEB$和$\triangle GEB$中,$\begin{cases}\angle ABE=\angle GBE,\\ BE=BE,\\ \angle AEB=\angle GEB,\end{cases}$

$\therefore$ $\triangle AEB\cong\triangle GEB$(ASA),$\therefore$ $AE=EG$,

故答案为相等(或$AE=EG$).

【应用结论】

(1)【证明】$\because$ $EG\perp AF$,$\therefore$ $\angle AEH=\angle GEF=90°$,$\therefore$ $\angle AHE+\angle EAH=90°$. $\because$ $\angle ACB=90°$,$\therefore$ $\angle ACF=90°$,$\therefore$ $\angle GFE+\angle EAH=90°$,$\therefore$ $\angle AHE=\angle GFE$.

由结论 2 可知,$AE=EG$.

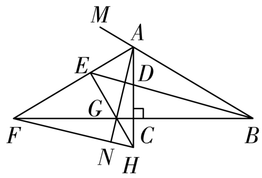
在$\triangle AEH$和$\triangle GEF$中,$\begin{cases}\angle AEH=\angle GEF,\\ \angle AHE=\angle GFE,\\ AE=GE,\end{cases}$

$\therefore$ $\triangle AEH\cong\triangle GEF$(AAS),$\therefore$ $AH=GF$.

(2)【解】补全图形如图所示.

证明:$\because$ $EG\perp AF$,$\therefore$ $\angle AEG=\angle FEH=90°$.

$\because$ 由结论 2 得$AE=EG$,由(1)过程得$\triangle AEH\cong\triangle GEF$,



$\therefore \angle EAG=\angle EGA=\dfrac{180°-90°}{2}=45°$, $AG=\sqrt{AE^2+EG^2}=\sqrt{2}AE$, $EH=EF$,

$\therefore \angle NGH=\angle EGA=45°$, $\angle EFH=\angle EHF=\dfrac{180°-90°}{2}=45°$,

$\therefore \angle AFN=\angle FAN=45°$, $\angle NGH=\angle NHG=45°$, $\therefore FN=AN=NG+AG$, $NH=NG$, $\therefore FN=NH+\sqrt{2}AE$.

刷 提升

1. D 【解析】连接 FC. $\because$ Rt$\triangle ABC\cong$Rt$\triangle CDE$, $\therefore AB=CD=1$, $BC=DE=2$, $AC=CE$, $\angle ACB=\angle CED$, $\therefore BD=3$. $\because \angle ABC=\angle CDE=90°$, $\therefore \angle ACB+\angle ECD=\angle DEC+\angle ECD=90°$, $\therefore \angle ACE=90°$. 又$\because F$ 是 AE 的中点, $AC=CE$, $\therefore \angle AFC=90°=\angle ABC$, $CF=AF$, $\therefore \angle FAB+\angle FCB=360°-90°-90°=180°=\angle FCD+\angle FCB$, $\therefore \angle FAB=\angle FCD$. 又$\because AF=CF$, $AB=CD$, $\therefore \triangle BAF\cong\triangle DCF$, $\therefore BF=FD$, $\angle AFB=\angle CFD$, $\therefore \angle AFC=\angle BFD=90°$, $\therefore \angle FBD=45°$, $\therefore BF=BD\times\cos\angle FBD=3\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$,故选 D.

2. (1)【解】延长 AD 至 E,使 $DE=AD$,连接 BE,如图(1).

$\because AD$ 是 BC 边上的中线, $\therefore BD=CD$.

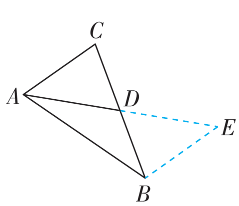
在$\triangle BDE$ 和$\triangle CDA$ 中, $\begin{cases} BD=CD, \\ \angle BDE=\angle CDA, \\ DE=AD, \end{cases}$

$\therefore \triangle BDE\cong\triangle CDA$(SAS), $\therefore BE=AC=6$.

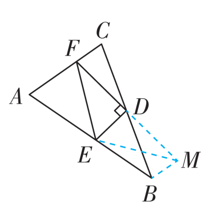
在$\triangle ABE$ 中,由三角形的三边关系得 $AB-BE<AE<AB+BE$,

$\therefore 10-6<AE<10+6$,即 $4<AE<16$, $\therefore 2<AD<8$,

故答案为 $2<AD<8$.



图(1)



图(2)

(2)【证明】延长 FD 至点 M,使 $DM=DF$,连接 BM, EM,如图(2). 同(1)得$\triangle BMD\cong\triangle CFD$(SAS), $\therefore BM=CF$. $\because DE\perp DF$, $\therefore \angle EDM=\angle EDF=90°$. 又$\because DM=DF$, $DE=DE$, $\therefore \triangle EDM\cong\triangle EDF$(SAS), $\therefore EM=EF$.

在$\triangle BME$ 中,由三角形的三边关系得 $BE+BM>EM$, $\therefore BE+CF>EF$.

(3)【解】$BE+DF=EF$. 证明如下:延长 AB 至点 N,使 $BN=DF$,连接 CN,如图(3).

$\because \angle ABC+\angle D=180°$, $\angle NBC+\angle ABC=180°$, $\therefore \angle NBC=\angle D$.

在$\triangle NBC$ 和$\triangle FDC$ 中, $\begin{cases} BN=DF, \\ \angle NBC=\angle D, \\ BC=DC, \end{cases}$

$\therefore \triangle NBC\cong\triangle FDC$(SAS), $\therefore CN=CF$, $\angle NCB=\angle FCD$.

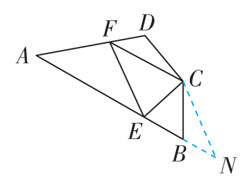
$\because \angle BCD=140°$, $\angle ECF=70°$, $\therefore \angle BCE+\angle FCD=70°$,

$\therefore \angle BCE+\angle NCB=\angle ECN=70°=\angle ECF$.

在$\triangle NCE$ 和$\triangle FCE$ 中, $\begin{cases} CN=CF, \\ \angle ECN=\angle ECF, \\ CE=CE, \end{cases}$

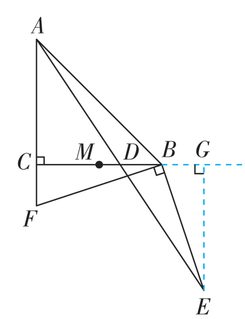
$\therefore \triangle NCE\cong\triangle FCE$(SAS), $\therefore EN=EF$.

$\because BE+BN=EN$, $\therefore BE+DF=EF$.



图(3)

3.【解】(1) $CD=BD+CF$. 证明如下:如图(1),过点 E 作 $EG\perp CB$ 交 CB 的延长线于 G,则$\angle ACD=\angle EGD=90°$.



图(1)

在$\triangle ACD$ 和$\triangle EGD$ 中, $\begin{cases} \angle ACD=\angle EGD, \\ \angle ADC=\angle EDG, \\ AD=ED, \end{cases}$

$\therefore \triangle ACD\cong\triangle EGD$(AAS), $\therefore CD=DG$, $AC=EG$. $\because \triangle ABC$ 是等腰三角形, $\angle ACB=90°$, $\therefore AC=BC$, $\therefore EG=BC$. $\because BF\perp BE$, $\therefore \angle EBF=90°$, $\therefore \angle CBF+\angle EBG=90°$.

又$\because \angle BEG+\angle EBG=90°$, $\therefore \angle BEG=\angle CBF$.

在$\triangle CBF$ 和$\triangle GEB$ 中, $\begin{cases} \angle FCB=\angle BGE=90°, \\ BC=EG, \\ \angle CBF=\angle GEB, \end{cases}$

$\therefore \triangle CBF\cong\triangle GEB$(ASA), $\therefore CF=BG$, $\therefore CD=DG=BD+BG=BD+CF$.

(2)题图(2): $DB=CD+CF$;题图(3): $CF=BD+CD$.

如图(2),作 $EG\perp CB$ 于 G,则 $\angle ACD=\angle EGD=90°$.

在 $\triangle ACD$ 和 $\triangle EGD$ 中,$\begin{cases}\angle ACD=\angle EGD,\\ \angle ADC=\angle EDG,\\ AD=ED,\end{cases}$

$\therefore\ \triangle ACD\cong\triangle EGD$(AAS),$\therefore\ CD=DG,AC=EG$. $\because\ AC=BC$,$\therefore\ EG=BC$. $\because\ BF\perp BE$,$\therefore\ \angle EBF=90°$,$\therefore\ \angle CBF+\angle EBG=90°$. $\because\ \angle BEG+\angle EBG=90°$,$\therefore\ \angle BEG=\angle CBF$.

在 $\triangle CBF$ 和 $\triangle GEB$ 中,$\begin{cases}\angle FCB=\angle BGE=90°,\\ BC=EG,\\ \angle CBF=\angle GEB,\end{cases}$

$\therefore\ \triangle CBF\cong\triangle GEB$(ASA),$\therefore\ CF=BG$,$\therefore\ CD=DG=BD-BG=BD-CF$,即 $DB=CD+CF$.

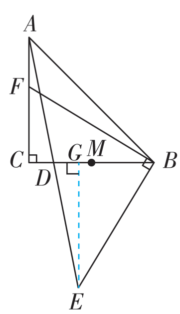
如图(3),作 $EG\perp BC$ 交 BC 的延长线于 G,则 $\angle ACD=\angle EGD=90°$.

在 $\triangle ACD$ 和 $\triangle EGD$ 中,$\begin{cases}\angle ACD=\angle EGD,\\ \angle ADC=\angle EDG,\\ AD=ED,\end{cases}$

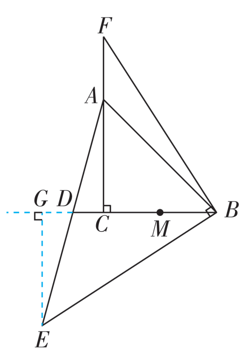
$\therefore\ \triangle ACD\cong\triangle EGD$(AAS),$\therefore\ CD=DG,AC=EG$. $\because\ AC=BC$,$\therefore\ EG=BC$. $\because\ BF\perp BE$,$\therefore\ \angle EBF=90°$,$\therefore\ \angle CBF+\angle EBG=90°$. $\because\ \angle BEG+\angle EBG=90°$,$\therefore\ \angle BEG=\angle CBF$.

在 $\triangle CBF$ 和 $\triangle GEB$ 中,$\begin{cases}\angle FCB=\angle BGE=90°,\\ BC=EG,\\ \angle CBF=\angle GEB,\end{cases}$

$\therefore\ \triangle CBF\cong\triangle GEB$(ASA),$\therefore\ CF=BG$,$\therefore\ CF=BG=BD+DG=BD+CD$.



图(2)



图(3)

专题 12 全等三角形常考模型(方法)

刷难关

1.【解】(1)$\because\ AD$ 是 $\triangle ABC$ 的中线,$\therefore\ BD=CD$.

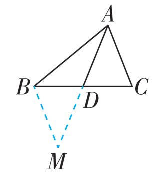
在 $\triangle ADC$ 和 $\triangle MDB$ 中,$\begin{cases}CD=BD,\\ \angle CDA=\angle BDM,\\ AD=MD,\end{cases}$

$\therefore\ \triangle ADC\cong\triangle MDB$(SAS),

$\therefore\ AC=BM,\angle CAD=\angle M$,$\therefore\ AC/\!/BM$,

故答案为 $AC=BM,AC/\!/BM$.

(2)如图(1),延长 AD 到 M,使 $DM=AD$,连接 BM.



图(1)

由(1)可知,$\triangle MDB\cong\triangle ADC$(SAS),

$\therefore\ BM=AC=8$.

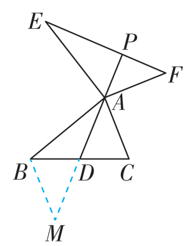
在 $\triangle ABM$ 中,$AB-BM<AM<AB+BM$,

$\therefore\ 12-8<AM<12+8$,

即 $4<2AD<20$,$\therefore\ 2<AD<10$,即 BC 边上的中线 AD 的取值范围为 $2<AD<10$.

(3)$EF=2AD,EF\perp AD$,理由如下:

如图(2),延长 AD 到 M,使得 $DM=AD$,连接 BM.



图(2)

由(1)可知 $BM=AC,AC/\!/BM$,

$\therefore\ \angle BAC+\angle ABM=180°$.

$\because\ AC=AF$,$\therefore\ BM=AF$.

$\because\ AE\perp AB,AF\perp AC$,

$\therefore\ \angle BAE=\angle FAC=90°$,

$\therefore\ \angle BAC+\angle EAF=180°$,

$\therefore\ \angle ABM=\angle EAF$.

在 $\triangle ABM$ 和 $\triangle EAF$ 中,$\begin{cases}AB=EA,\\ \angle ABM=\angle EAF,\\ BM=AF,\end{cases}$

$\therefore\ \triangle ABM\cong\triangle EAF$(SAS),

$\therefore\ AM=EF,\angle BAM=\angle E$.

$\because\ AD=DM$,$\therefore\ AM=2AD$,$\therefore\ EF=2AD$.

$\because\ \angle EAM=\angle BAM+\angle BAE=\angle E+\angle APE$,

$\therefore\ \angle APE=\angle BAE=90°$,$\therefore\ EF\perp AD$.

2.【解】(1)$AB=AC+CD$. 理由如下:

$\because$ 在 $\triangle ABC$ 中,$\angle C=2\angle B$,$\angle C=90°$,AD 为 $\angle BAC$ 的平分线,$\therefore\ \angle B=45°$,$\angle EAD=\angle CAD$.

在 $\triangle EAD$ 和 $\triangle CAD$ 中,$\begin{cases}AE=AC,\\ \angle EAD=\angle CAD,\\ AD=AD,\end{cases}$

$\therefore\ \triangle EAD\cong\triangle CAD$(SAS),$\therefore\ ED=CD$,$\angle AED=\angle C=90°$,

$\therefore\ \angle BED=90°$.

又 $\because\ \angle B=45°$,$\therefore\ \angle EDB=\angle B=45°$,$\therefore\ ED=EB$,$\therefore\ EB=CD$,

$\therefore\ AB=AE+EB=AC+CD$.

(2)$AB=AC+CD$. 理由如下:

如图(1),在 AB 上截取 $AF=AC$,连接 FD.

$\because$ 在 $\triangle ABC$ 中,AD 为 $\angle BAC$ 的平分线,$\therefore\ \angle FAD=\angle CAD$.

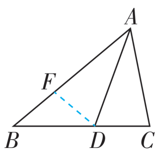
在 $\triangle FAD$ 和 $\triangle CAD$ 中,$\begin{cases}AF=AC,\\ \angle FAD=\angle CAD,\\ AD=AD,\end{cases}$

第一部分 考点过关
第二部分 题型突破
第三部分 中考新趋势
狂K重点

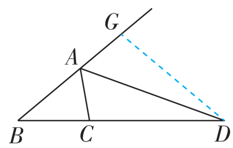
$\therefore \triangle FAD \cong \triangle CAD(\text{SAS})$，$\therefore FD=CD$，$\angle AFD=\angle ACB$.

$\because \angle AFD=\angle B+\angle FDB$，$\angle ACB=2\angle B$，$\therefore \angle B+\angle FDB=\angle ACB=2\angle B$，$\therefore \angle FDB=\angle B$，$\therefore FD=FB$，$\therefore FB=CD$，

$\therefore AB=AF+FB=AC+CD$.



图(1)



图(2)

(3)不成立，新数量关系为 $CD=AB+AC$.

如图(2)，在 BA 的延长线上取一点 G，使 $AG=AC$，连接 DG.

$\because AD$ 是 $\angle CAG$ 的平分线，$\therefore \angle GAD=\angle CAD$.

在 $\triangle GAD$ 和 $\triangle CAD$ 中，$\begin{cases} AG=AC, \\ \angle GAD=\angle CAD, \\ AD=AD, \end{cases}$

$\therefore \triangle GAD \cong \triangle CAD(\text{SAS})$，$\therefore GD=CD$，$\angle AGD=\angle ACD$.

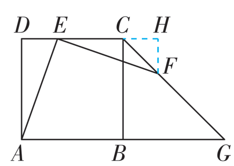
$\because \angle AGD=180°-\angle B-\angle GDB$，$\angle ACD=180°-\angle ACB$，

$\therefore 180°-\angle B-\angle GDB=180°-\angle ACB$，$\therefore \angle B+\angle GDB=\angle ACB$.

$\because \angle ACB=2\angle B$，$\therefore \angle B+\angle GDB=2\angle B$，$\therefore \angle GDB=\angle B$，

$\therefore GD=GB=AB+AG=AB+AC$，$\therefore CD=AB+AC$.

3. A　【解析】如图，过点 F 作 $FH \perp DC$ 交 DC 延长线于点 H，$\therefore \angle H=90°$. $\because$ 四边形 $ABCD$ 是正方形，$\therefore AB /\!/ CD$，$\angle D=\angle ABC=90°$，$AD=DC$. $\because$ 把 AE 绕点 E 逆时针旋转 $90°$，得到 FE，$\therefore AE=FE$，$\angle AEF=90°$，$\therefore \angle D=\angle AEF=90°$，$\therefore \angle DAE+\angle AED=90°$，$\angle HEF+\angle AED=90°$，$\therefore \angle DAE=\angle HEF$. 在 $\triangle ADE$ 和 $\triangle EHF$



中，$\begin{cases} \angle D=\angle H=90°, \\ \angle DAE=\angle HEF, \\ AE=EF, \end{cases}$

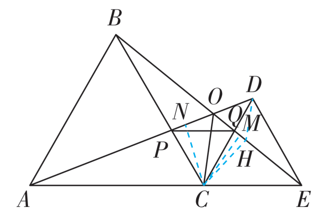
$\therefore \triangle ADE \cong \triangle EHF(\text{AAS})$，$\therefore AD=EH$，$DE=HF$，$\therefore EH=DC$，$\therefore DE=CH=HF$，$\therefore \angle HCF=45°$，$\therefore \angle G=45°$，$\therefore \triangle CBG$ 为等腰直角三角形. 设 $CH=HF=DE=x$，正方形的边长为 y，则 $CE=y-x$，$CF=\sqrt{2}x$，$CG=\sqrt{2}y$，$\therefore FG=CG-CF=\sqrt{2}y-\sqrt{2}x=\sqrt{2}(y-x)$，$\therefore \frac{FG}{CE}=\frac{\sqrt{2}(y-x)}{y-x}=\sqrt{2}$，故选 A.

4. ①②③④　【解析】$\because \triangle ABC$ 和 $\triangle CDE$ 为等边三角形，$\therefore AC=BC$，$CD=CE=DE$，$\angle ACB=\angle DCE=\angle CDE=60°$，$\therefore \angle ACB+\angle BCD=\angle DCE+\angle BCD$，即 $\angle ACD=\angle BCE$. 在 $\triangle ACD$ 和 $\triangle BCE$ 中，$\begin{cases} AC=BC, \\ \angle ACD=\angle BCE, \\ DC=EC, \end{cases}$ $\therefore \triangle ACD \cong \triangle BCE(\text{SAS})$，

$\therefore \angle CDA=\angle CEB$，$\angle CAD=\angle CBE$. 又 $\because \angle BPO=\angle APC$，$\therefore \angle AOB=\angle ACB=60°$，故①正确. $\because \angle ACB=\angle DCE=60°$，$\angle ACB+\angle BCD+\angle DCE=180°$，$\therefore \angle BCD=60°$，$\therefore \angle PCD=\angle QCE$.

在 $\triangle CDP$ 和 $\triangle CEQ$ 中，$\begin{cases} \angle PDC=\angle QEC, \\ DC=EC, \\ \angle PCD=\angle QCE, \end{cases}$

$\therefore \triangle CDP \cong \triangle CEQ(\text{ASA})$，$\therefore CP=CQ$. 又 $\because \angle PCQ=60°$，$\therefore \triangle PCQ$ 为等边三角形，$\therefore \angle PQC=\angle DCE=60°$，$\therefore PQ /\!/ AE$，故②正确. 过 C 作 $CM \perp BE$ 于 M，$CN \perp AD$ 于 N，如图.



$\because \triangle BCE \cong \triangle ACD$，$\therefore S_{\triangle BCE}=S_{\triangle ACD}$，$BE=AD$，$\therefore \frac{1}{2}\times BE\times CM=\frac{1}{2}\times AD\times CN$，$\therefore CM=CN$. 又 $\because CM \perp BE$，$CN \perp AD$，$\therefore OC$ 平分 $\angle AOE$，故③正确. 在 OE 上截取 $EH=OC$，连接 DH，如图. $\because \angle CAO=\angle CBO$，$\angle CBO+\angle CEO=\angle ACB=60°$，$\therefore \angle CAO+\angle CEO=60°$，$\therefore \angle AOE=120°$. $\because OC$ 平分 $\angle AOE$，$\therefore \angle EOC=60°=\angle CDE$. 又 $\because \angle CQO=\angle EQD$，$\therefore \angle OCD=\angle HED$.

在 $\triangle OCD$ 和 $\triangle HED$ 中，$\begin{cases} OC=EH, \\ \angle OCD=\angle HED, \\ CD=ED, \end{cases}$

$\therefore \triangle OCD \cong \triangle HED(\text{SAS})$，$\therefore OD=HD$. $\because \angle DOH=180°-\angle AOE=60°$，$\therefore \triangle DHO$ 是等边三角形，$\therefore OH=OD$. $\because OE=EH+OH$，$\therefore OE=OC+OD$，故④正确. 故答案为①②③④.

5.【解】(1)$\because$ 在 $\triangle ABC$ 中，$AB=AC$，$\angle BAC=60°$，$\therefore \triangle ABC$ 是等边三角形，$\therefore \angle BAC=\angle B=\angle BCA=60°$.

由旋转得 $AD=AP$，$\angle DAP=60°$，$\therefore \angle BAC=\angle DAP=60°$，

$\therefore \angle BAC-\angle DAC=\angle DAP-\angle DAC$，即 $\angle BAD=\angle CAP$.

在 $\triangle BAD$ 和 $\triangle CAP$ 中，$\begin{cases} AB=AC, \\ \angle BAD=\angle CAP, \\ AD=AP, \end{cases}$

$\therefore \triangle BAD \cong \triangle CAP(\text{SAS})$，$\therefore \angle ACP=\angle B=60°$，$BD=CP$，

$\therefore AC=BC=BD+CD=PC+CD$. 故答案为 $60°$，$AC=CD+CP$.

(2)由旋转得 $\angle DAP=90°$，$AD=AP$.

$\because \angle BAC=90°$，$AB=AC$，$\therefore \angle B=\angle ACB=45°$.

同理(1)可得 $\triangle BAD \cong \triangle CAP$，$\therefore BD=CP$，$\angle ACP=\angle B=45°$，

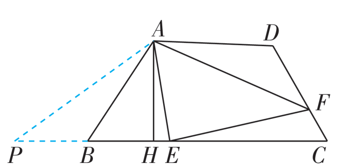
$\therefore \angle DCP=90°$，$\therefore CP^2+CD^2=PD^2$，$\therefore BD^2+CD^2=PD^2$.

$\because$ 在 $\text{Rt}\triangle ADP$ 中，$PD^2=AD^2+AP^2=2AD^2$，

$\therefore BD^2+CD^2=2AD^2$.

6. B 【解析】由旋转得 $\angle FAD=90^\circ, AF=AD, BF=DC, \angle ABF=\angle C$. ∵ $\angle DAE=45^\circ$, ∴ $\angle FAE=\angle FAD-\angle DAE=45^\circ$, ∴ $\angle FAE=\angle DAE$. 又∵ $AE=AE, AF=AD$, ∴ $\triangle FAE\cong\triangle DAE$(SAS), ∴ $EF=DE$. ∵ $\angle BAC=90^\circ$, ∴ $\angle ABC+\angle C=90^\circ$, ∴ $\angle ABF+\angle ABC=90^\circ$, ∴ $\angle FBE=90^\circ$. 在 Rt$\triangle BFE$ 中, $BF^2+BE^2=EF^2$, ∴ $CD^2+BE^2=DE^2$. ∴ 一定正确的是①②④, 故选 B.

7. 54 【解析】在 CB 的延长线上取一点 P, 使 $BP=DF$, 连接 AP, 如图所示. ∵ $\angle BAD=2\alpha, \angle C=180^\circ-2\alpha$, ∴ $\angle BAD+\angle C=180^\circ$. ∵ 四边形 $ABCD$ 的内角和为 360°, ∴ $\angle ABC+\angle D=180^\circ$. 又∵ $\angle ABC+\angle ABP=180^\circ$, ∴ $\angle ABP=\angle D$. 在 $\triangle ABP$ 和 $\triangle ADF$ 中, $\begin{cases}AB=AD,\\ \angle ABP=\angle D,\\ BP=DF,\end{cases}$ ∴ $\triangle ABP\cong\triangle ADF$(SAS), ∴ $S_{\triangle ABP}=S_{\triangle ADF}$, $\angle BAP=\angle DAF, AP=AF$. ∵ $\angle BAE+\angle DAF+\angle EAF=\angle BAD=2\alpha, \angle EAF=\alpha$, ∴ $\angle BAE+\angle DAF=\alpha$, ∴ $\angle BAE+\angle BAP=\alpha$, 即 $\angle EAP=\alpha$, ∴ $\angle EAP=\angle EAF=\alpha$. 在 $\triangle AEP$ 和 $\triangle AEF$ 中, $\begin{cases}AP=AF,\\ \angle EAP=\angle EAF,\\ AE=AE,\end{cases}$ ∴ $\triangle AEP\cong\triangle AEF$(SAS), ∴ $S_{\triangle AEP}=S_{\triangle AEF}$, ∴ $S_{\text{五边形}ABEFD}=S_{\triangle ABE}+S_{\triangle ADF}+S_{\triangle AEF}=S_{\triangle ABE}+S_{\triangle ABP}+S_{\triangle APE}=2S_{\triangle APE}$. ∵ $BE+DF=9$, ∴ $EP=BE+BP=BE+DF=9$. ∵ $AH\perp BC, AH=6$, ∴ $S_{\triangle APE}=\frac{1}{2}EP\cdot AH=\frac{1}{2}\times9\times6=27$, ∴ $S_{\text{五边形}ABEFD}=2S_{\triangle APE}=2\times27=54$. 故答案为 54.



考点 22 相似

刷基础

1. $\frac{3}{5}$ 【解析】∵ 随机取出一枚棋子, 它是黑棋的概率是 $\frac{3}{8}$, ∴ $\frac{x}{x+y}=\frac{3}{8}$, ∴ $\frac{x}{y}=\frac{3}{5}$, 故答案为 $\frac{3}{5}$.

2. $\frac{1}{3}$ 【解析】∵ $\frac{b}{a}=2$, ∴ $b=2a$, ∴ $\frac{a}{a+b}=\frac{a}{a+2a}=\frac{a}{3a}=\frac{1}{3}$, 故答案为 $\frac{1}{3}$.

3. $(28\sqrt{5}-28)$ 【解析】∵ $AB=56$ cm, $\frac{AP}{AB}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$, ∴ $\frac{AP}{56}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$, ∴ $AP=(28\sqrt{5}-28)$ cm, 故答案为 $(28\sqrt{5}-28)$.

4. $(25-x)^2=25x$ 【解析】由题意可知, 点 P 是线段 AB 的黄金分割点, 且 $PB<PA, PB=x$, 则 $PA=25-x$. ∵ $\frac{BP}{AP}=\frac{AP}{AB}$, ∴ $AP^2=BP\cdot AB$, 即 $(25-x)^2=25x$, 故答案为 $(25-x)^2=25x$.

5. C 【解析】∵ 在四边形 $ABCD$ 中, $AD/\!/BC, EF/\!/AD$, ∴ $AD/\!/BC/\!/EF$, ∴ $\frac{AE}{EB}=\frac{DF}{FC}$, 即 $\frac{1}{2}=\frac{3}{FC}$, ∴ $FC=6$, 故选 C.

6. $\frac{3}{5}$ 【解析】∵ $AB=3, BC=2$, ∴ $AC=AB+BC=5$. ∵ $l_1/\!/l_2/\!/l_3$, ∴ $\frac{DE}{DF}=\frac{AB}{AC}=\frac{3}{5}$, 故答案为 $\frac{3}{5}$.

7. D 【解析】∵ 两个相似三角形的相似比是 1∶3, ∴ 这两个相似三角形的面积比是 1∶9. 故选 D.

刷有所得

相似三角形的性质

相似三角形的面积比等于相似比的平方.

8. B 【解析】∵ $\triangle ABC$ 与 $\triangle DEF$ 相似, 且相似比为 1∶3, ∴ $\triangle ABC$ 与 $\triangle DEF$ 的周长之比为 1∶3, 故选 B.

9. C 【解析】∵ 四边形 $ABCD$ 是正方形, E 为 CD 边的中点, ∴ $\angle B=\angle C=90^\circ, AB=CD=2CE$. 若 $\triangle ABP\backsim\triangle ECP$, 则 $\frac{AB}{EC}=\frac{BP}{CP}$, ∴ $BP=2CP$, ∴ $BP:BC=BP:(BP+CP)=2CP:(2CP+CP)=2:3$, 故③正确. 若 $\triangle ABP\backsim\triangle PCE$, 则 $\frac{AB}{CP}=\frac{BP}{CE}$, ∴ $\frac{1}{2}AB^2=BP\cdot CP$. ∵ 四边形 $ABCD$ 是正方形, ∴ $AB=BC=BP+CP$, ∴ $\frac{1}{2}(BP+CP)^2=BP\cdot CP$, ∴ $BP^2+CP^2=0$, 此种情况不成立. ∴ 能推出 $\triangle ABP$ 与 $\triangle ECP$ 一定相似的只有③, 共 1 个. 故选 C.

10. $\frac{3}{2}$ 【解析】由题意得 $AM/\!/BN$, ∴ $\angle A=\angle CBN, \angle M=\angle CNB$, ∴ $\triangle ACM\backsim\triangle BCN$, ∴ $\frac{AC}{BC}=\frac{MC}{CN}=\frac{MC}{MC-MN}$, ∴ $\frac{AC}{2}=\frac{7}{7-3}$, 解得 $AC=\frac{7}{2}$, ∴ $AB=AC-BC=\frac{7}{2}-2=\frac{3}{2}$, 故答案为 $\frac{3}{2}$.

11. C 【解析】∵ $\triangle ABC$ 与 $\triangle A'B'C'$ 是位似图形, 且 $\triangle ABC$ 与 $\triangle A'B'C'$ 的相似比为 1∶2, ∴ $\triangle ABC$ 与 $\triangle A'B'C'$ 的周长比为 1∶2. 又∵ $\triangle ABC$ 的周长是 2, ∴ $\triangle A'B'C'$ 的周长是 4, 故选 C.

12. B 【解析】∵ $\triangle OA'B'$ 与 $\triangle OAB$ 位似, 相似比为 2∶1, 位似中心为原点 O, ∴ 点 $A(2,1)$ 的对应点 A' 的坐标为 $(-2\times2, -2\times$

第一部分 考点过关
第二部分 题型突破
第三部分 中考新趋势
狂K重点

1),即(-4,-2). 故选 B.

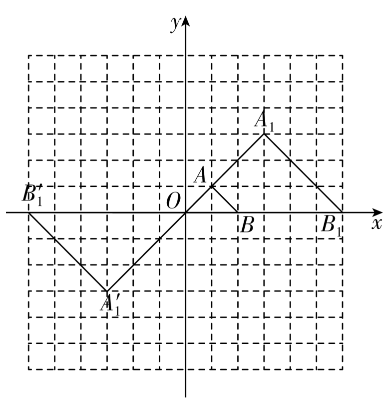
刷有所得

①位似图形必相似,对应角相等,对应边成比例;

②对应点连线过位似中心,对应线段平行或在一条直线上,且对应线段长度的比等于相似比;

③位似图形在位似中心的同侧或异侧,可放大或缩小原图形.

13. C 【解析】如图,根据题意可画出$\triangle OA_1B_1$与$\triangle OA_1'B_1'$,$\therefore$ 点 A_1 的坐标是(3,3)或(-3,-3),故 A 选项说法错误,不符合题意. $\because$ $\triangle OA_1B_1$ 与$\triangle OAB$ 的相似比为 3∶1,$\therefore$ $\triangle OA_1B_1$ 与$\triangle OAB$ 的周长之比为 3∶1,故 B 选项说法错误,不符合题意. 由图可得 $A_1B_1=\sqrt{3^2+3^2}=3\sqrt{2}$,故 C 选项说法正确,符合题意. 由图可得$\triangle OA_1B_1$ 可能在第一象限内,也可能在第三象限内,故 D 选项说法错误,不符合题意. 故选 C.



刷 易错

14. 8. 4 或 2 或 12 【解析】设 $DP=x$,则 $BP=BD-x=14-x$. $\because AB\perp BD$, $CD\perp BD$, $\therefore \angle B=\angle D=90°$. 当$\frac{AB}{CD}=\frac{BP}{DP}$时,$\triangle ABP\backsim\triangle CDP$,即$\frac{6}{4}=\frac{14-x}{x}$,整理得 $5x-28=0$,解得 $x=\frac{28}{5}$,经检验,$x=\frac{28}{5}$是原分式方程的解,$\therefore BP=14-\frac{28}{5}=8.4$. 当$\frac{AB}{DP}=\frac{BP}{DC}$时,$\triangle ABP\backsim\triangle PDC$,即$\frac{6}{x}=\frac{14-x}{4}$,整理得 $x^2-14x+24=0$,解得 $x_1=2, x_2=12$,经检验,$x_1=2, x_2=12$ 是原分式方程的解,$\therefore BP=14-2=12$ 或 $BP=14-12=2$. 综上,当 BP 的长为 8. 4 或 2 或 12 时,以 P,C,D 为顶点的三角形与$\triangle ABP$ 相似. 故答案为 8. 4 或 2 或 12.

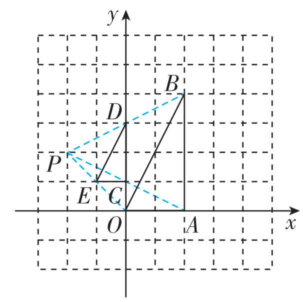
易错警示

相似三角形的对应边成比例,当对应边不确定时需分情况讨论.

刷 提升

1. C 【解析】$\because a,b,c,d$ 均为正实数,$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$,$\therefore$ ①$\frac{b}{a}=\frac{d}{c}$,正确;②$ad=bc$,正确;③$\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$,$\therefore \frac{a+2c}{c}=\frac{b+2d}{d}$,正确;④当 $a\geqslant b$ 时,$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{a+c}{b+d}\geqslant\frac{c+b}{d+b}$,$\therefore$ 原结论错误,故选 C.

2. (-2,2) 【解析】如图,连接 AC,BD,OE,并分别延长,相交于点 P,则$\triangle ABO$ 与$\triangle CDE$ 是以点 P 为位似中心的位似图形,$\therefore$ 位似中心的坐标是(-2,2). 故答案为(-2,2).



3. 3 【解析】$\because CD=CA, DE/\!/CB$,$\therefore AF=EF$,$\therefore CF$ 是$\triangle ADE$ 的中位线,$\therefore DE=2CF=2$. $\because DE=DC$,$\therefore AC=DE=2$. $\because \angle CAB=\angle CFA, \angle ACF=\angle ACB$,$\therefore \triangle CAF\backsim\triangle CBA$,$\therefore AC:BC=CF:AC$,$\therefore 2:BC=1:2$,$\therefore BC=4$,$\therefore BF=BC-FC=3$. 故答案为 3.

4. $(\sqrt{5}-1)$ 【解析】$\because$ 习字格为正方形,$\therefore MN/\!/PQ, \angle N=90°$. 又$\because AB/\!/PN$,$\therefore$ 四边形 $ANPB$ 为矩形,$\therefore AB=NP=2$ cm. $\because \frac{BC}{AB}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$,$\therefore BC=\frac{\sqrt{5}-1}{2}AB=\frac{\sqrt{5}-1}{2}\times2=(\sqrt{5}-1)$ cm. 故答案为$(\sqrt{5}-1)$.

5. 【解】$\because CF/\!/AD$,$\therefore \angle F=\angle APF, \angle FCE=\angle EAP$.

$\because BE$ 为 AC 边上的中线,$\therefore CE=AE$,

$\therefore \triangle CEF\cong\triangle AEP$(AAS),$\therefore FC=AP$.

$\because PD/\!/FC$,$\therefore \triangle BPD\backsim\triangle BFC$,

$\therefore \frac{PD}{FC}=\frac{BD}{BC}=\frac{2}{3}$,$\therefore \frac{AP}{PD}=\frac{3}{2}$. 故答案为$\frac{3}{2}$.

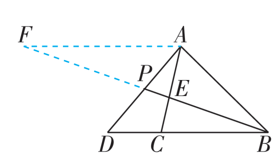
(1)如图(1),过 A 作 $AF/\!/BC$,交 BP 延长线于点 F,

$\therefore \triangle AFE\backsim\triangle CBE$,$\therefore \frac{AF}{BC}=\frac{AE}{EC}$. $\because \frac{AE}{EC}=\frac{3}{2}$,$\therefore \frac{AF}{BC}=\frac{3}{2}$,

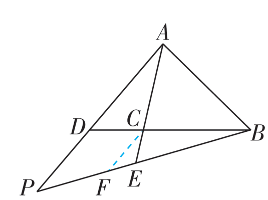
$\therefore$ 设 $AF=3x$,则 $BC=2x$.

$\because \frac{BD}{BC}=\frac{3}{2}$,$\therefore BD=3x$,$\therefore AF=BD=3x$,

$\because AF/\!/BD$,$\therefore \triangle AFP\backsim\triangle DBP$,$\therefore \frac{AP}{PD}=\frac{AF}{BD}=1$.



图(1)



图(2)

(2)如图(2),过 C 作 $CF/\!/AP$ 交 PB 于 F,

$\therefore \triangle BCF\backsim\triangle BDP$,$\therefore \frac{BC}{BD}=\frac{CF}{PD}=\frac{2}{3}$,$\therefore$ 设 $CF=2y$,则 $PD=3y$.

$\because CF/\!/AP,\therefore \triangle ECF\backsim\triangle EAP,\therefore \dfrac{EC}{AE}=\dfrac{CF}{AP}=\dfrac{2}{7}$,

$\therefore AP=7y,\therefore \dfrac{AP}{PD}=\dfrac{7}{3}$. 故答案为$\dfrac{7}{3}$.

重难专题 13 相似三角形常考模型

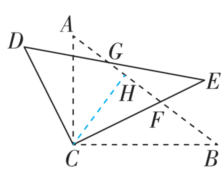
刷难关

1.【证明】$\because$ D,E 分别是 AB,AC 的中点，$\therefore AD=\dfrac{1}{2}AB,AE=\dfrac{1}{2}AC,\therefore \dfrac{AD}{AB}=\dfrac{AE}{AC}=\dfrac{1}{2}$. 又$\because \angle A=\angle A,\therefore \triangle ADE\backsim\triangle ABC$.

2. D 【解析】A 选项，$\because \angle ADE=\angle ABC,\angle A=\angle A,\therefore \triangle ADE\backsim\triangle ABC$，故该选项不符合题意. B 选项，$\because DE/\!/BC,\therefore \triangle ADE\backsim\triangle ABC$，故该选项不符合题意. C 选项，$\because \dfrac{AE}{AC}=\dfrac{AD}{AB},\angle A=\angle A$，$\therefore \triangle ADE\backsim\triangle ABC$，故该选项不符合题意. D 选项，由 $AE\cdot AC=AD\cdot AB$，可得 $\dfrac{AE}{AB}=\dfrac{AD}{AC}$. 又$\because \angle A=\angle A,\therefore \triangle ADE\backsim\triangle ACB$，故该选项符合题意. 故选 D.

3. 20 **【解析】**设小孔 O 到 $A'B'$ 的距离为 x cm. $\because AB/\!/A'B'$，$\therefore$ 易得$\triangle AOB\backsim\triangle A'OB'$. $\because$ 相似三角形对应高的比等于相似比，$\therefore \dfrac{AB}{A'B'}=\dfrac{30}{x}$，即$\dfrac{36}{24}=\dfrac{30}{x}$，$\therefore x=20$，$\therefore$ 小孔 O 到 $A'B'$ 的距离为 20 cm，故答案为 20.

4. $\dfrac{10-3\sqrt{5}}{5}$ **【解析】**如图，过点 C 作 $CH\perp AB$，垂足为 H. 在 Rt$\triangle ABC$ 中，$\sin B=\dfrac{AC}{BA}=\dfrac{3}{5}$，$\therefore$ 设 $AC=3k$，则 $AB=5k$，$\therefore BC=\sqrt{AB^2-AC^2}=4k$. $\because AB\cdot CH=AC\cdot BC=2S_{\triangle ABC}$，$\therefore CH=\dfrac{AC\cdot BC}{AB}=\dfrac{12}{5}k$.



$\because \dfrac{AF}{BF}=\dfrac{3}{2}$，$\therefore BF=\dfrac{2}{5}AB=2k$. 在 Rt$\triangle HBC$ 中，$BH=\sqrt{BC^2-CH^2}=\dfrac{16}{5}k$，$\therefore HF=BH-BF=\dfrac{16}{5}k-2k=\dfrac{6}{5}k$. 在 Rt$\triangle HFC$ 中，$CF=\sqrt{CH^2+HF^2}=\sqrt{\left(\dfrac{12}{5}k\right)^2+\left(\dfrac{6}{5}k\right)^2}=\dfrac{6\sqrt{5}}{5}k$. 由旋转得，$\angle E=\angle B,CE=BC=4k$，$\therefore EF=CE-CF=\dfrac{20-6\sqrt{5}}{5}k$. $\because \angle GFE=\angle BFC$，$\therefore \triangle EFG\backsim\triangle BFC$，$\therefore \dfrac{EG}{BC}=\dfrac{EF}{BF}$，

即$\dfrac{EG}{BC}=\dfrac{\dfrac{20-6\sqrt{5}}{5}k}{2k}=\dfrac{10-3\sqrt{5}}{5}$. 故答案为$\dfrac{10-3\sqrt{5}}{5}$.

5.【证明】$\because AC=4,AD=2,BD=6,\therefore AB=AD+BD=2+6=8$，

$\therefore \dfrac{AC}{AB}=\dfrac{AD}{AC}=\dfrac{1}{2}$.

又$\because \angle A=\angle A,\therefore \triangle ACD\backsim\triangle ABC$.

6.【解】$\because \triangle ABC$ 中，$\angle ACB=90°,CD\perp AB$，

$\therefore$ 易得$\triangle BCD\backsim\triangle CAD,\therefore \dfrac{BD}{CD}=\dfrac{CD}{AD}$，

$\therefore CD^2=AD\cdot BD$.

又$\because BD=2,AD=8,\therefore CD^2=16,AB=BD+AD=10$，

$\therefore CD=4$，

$\therefore S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}AB\cdot CD=\dfrac{1}{2}\times10\times4=20$.

7. $\dfrac{5}{4}$ **【解析】**$\because BD=\dfrac{2}{3}BC$，$\therefore$ 设 $BD=2a$，则 $BC=3a$，$\therefore CD=BC-BD=a$. $\because \triangle ABC$ 为等边三角形，$\therefore \angle BAC=\angle B=\angle C=60°,AB=BC=AC=3a$. 根据折叠的性质可得 $AM=DM,AN=DN,\angle MAN=\angle MDN=60°$. $\because \angle BDM+\angle MDN+\angle CDN=180°$，$\therefore \angle BDM+\angle CDN=120°$. $\because \angle BMD+\angle BDM+\angle MBD=180°$，$\therefore \angle BMD+\angle BDM=120°$，$\therefore \angle BMD=\angle CDN$，$\therefore \triangle BMD\backsim\triangle CDN$，$\therefore \dfrac{DM}{DN}=\dfrac{C_{\triangle BMD}}{C_{\triangle CDN}}$，即$\dfrac{AM}{AN}=\dfrac{C_{\triangle BMD}}{C_{\triangle CDN}}$. $\because C_{\triangle BMD}=BD+BM+DM=BD+BM+AM=BD+AB=5a$，$C_{\triangle CDN}=CD+CN+DN=CD+CN+AN=CD+AC=4a$，$\therefore \dfrac{AM}{AN}=\dfrac{C_{\triangle BMD}}{C_{\triangle CDN}}=\dfrac{5a}{4a}=\dfrac{5}{4}$. 故答案为$\dfrac{5}{4}$.

8. C 【解析】$\because$ 正方形 $ABCD$ 的边长为 4，E 为 AB 中点，$\therefore AE=BE=\dfrac{1}{2}AB=2,CB=4,\angle A=\angle B=90°$. $\because CE\perp EF$，$\therefore \angle CEF=90°$，$\therefore \angle AEF+\angle CEB=90°$. $\because \angle CEB+\angle BCE=90°$，$\therefore \angle AEF=\angle BCE$. 又$\because \angle A=\angle B=90°$，$\therefore \triangle AFE\backsim\triangle BEC$，$\therefore \dfrac{AF}{BE}=\dfrac{AE}{BC}$，$\therefore \dfrac{AF}{2}=\dfrac{2}{4}$，$\therefore AF=1$. 由勾股定理得 $EF=\sqrt{AF^2+AE^2}=\sqrt{1+4}=\sqrt{5}$，同理可得 $CE=\sqrt{BE^2+BC^2}=\sqrt{4+16}=2\sqrt{5}$，$\therefore S_{\triangle CEF}=\dfrac{1}{2}EF\cdot CE=\dfrac{1}{2}\times\sqrt{5}\times2\sqrt{5}=5$. 故选 C.

9. (1)**【证明】**$\because$ 四边形 $ABCD$ 和四边形 $AEFG$ 均为矩形，$\therefore \angle BAD=\angle EAG=90°$，即$\angle BAE+\angle DAE=\angle DAG+\angle DAE=90°$，$\therefore \angle BAE=\angle DAG$.

又$\because \dfrac{AB}{AD}=\dfrac{AE}{AG}$，$\therefore \triangle ABE\backsim\triangle ADG$，$\therefore \angle ABE=\angle ADG$.

(2)**【解】**$\because$ 四边形 $ABCD$ 为矩形，

$\therefore AD/\!/BC,\angle ABC=\angle ABE+\angle CBD=90°$，$\therefore \angle ADB=\angle CBD$.

$\because \angle ABE=\angle ADG$，

$\therefore \angle ADG+\angle ADB=\angle ABE+\angle CBD=90°$，即$\angle EDG=90°$.

在 Rt$\triangle ABD$ 中，$AB=\sqrt{3},AD=\sqrt{15}$，

$\therefore BD=\sqrt{AB^2+AD^2}=\sqrt{(\sqrt{3})^2+(\sqrt{15})^2}=3\sqrt{2}$，

第一部分 考点过关
第二部分 题型突破
第三部分 中考新趋势
狂K重点

$\therefore BE=\frac{1}{3}BD=\sqrt{2}$，$\therefore DE=BD-BE=2\sqrt{2}$.

由(1)知，$\triangle ABE\backsim\triangle ADG$，$\therefore \frac{AB}{AD}=\frac{BE}{DG}$，

$\therefore \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{15}}=\frac{\sqrt{2}}{DG}$，$\therefore DG=\sqrt{10}$.

在 Rt$\triangle DEG$ 中，$EG=\sqrt{DG^2+DE^2}=\sqrt{(\sqrt{10})^2+(2\sqrt{2})^2}=3\sqrt{2}$.

10.【解】(1)$\because$ $\triangle ABC$ 和 $\triangle ADE$ 都是等边三角形，

$\therefore AB=AC$，$AD=AE$，$\angle DAB+\angle BAE=\angle BAE+\angle EAC=60°$，

$\therefore \angle DAB=\angle EAC$.

在 $\triangle ADB$ 和 $\triangle AEC$ 中，$\begin{cases}AD=AE,\\ \angle DAB=\angle EAC,\\ AB=AC,\end{cases}$

$\therefore \triangle ADB\cong\triangle AEC$(SAS)，

$\therefore BD=CE$，故答案为 $BD=CE$.

(2)$\because$ $\triangle ABC$ 和 $\triangle ADE$ 都是等腰直角三角形，$\angle ABC=\angle ADE=90°$，$\therefore \frac{AD}{AE}=\frac{AB}{AC}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，$\angle DAB+\angle BAE=\angle BAE+\angle EAC=45°$，

$\therefore \angle DAB=\angle EAC$，$\therefore \triangle ADB\backsim\triangle AEC$，

$\therefore \frac{AD}{AE}=\frac{BD}{CE}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，$\therefore BD=\frac{\sqrt{2}}{2}CE$(或 $CE=\sqrt{2}BD$)，

故答案为 $BD=\frac{\sqrt{2}}{2}CE$(或 $CE=\sqrt{2}BD$).

(3)①$\because \frac{AB}{BC}=\frac{AD}{DE}=\frac{3}{4}$，$\angle ABC=\angle ADE=90°$，

$\therefore \triangle ABC\backsim\triangle ADE$，

$\therefore \angle DAE=\angle BAC$，即 $\angle DAB+\angle BAE=\angle BAE+\angle EAC$，

$\therefore \angle DAB=\angle EAC$.

设 $AB=3x$，$BC=4x$.

在 Rt$\triangle ABC$ 中，$AC=\sqrt{AB^2+BC^2}=\sqrt{(3x)^2+(4x)^2}=5x$.

同理，在 Rt$\triangle ADE$ 中，设 $AD=3a$，$DE=4a$，则 $AE=5a$，

$\therefore \frac{AD}{AE}=\frac{3a}{5a}=\frac{3}{5}$，$\frac{AB}{AC}=\frac{3x}{5x}=\frac{3}{5}$，即 $\frac{AD}{AE}=\frac{AB}{AC}=\frac{3}{5}$.

又$\because \angle DAB=\angle EAC$，

$\therefore \triangle DAB\backsim\triangle EAC$，$\therefore \frac{BD}{CE}=\frac{AD}{AE}=\frac{3}{5}$.

②由①得 $\triangle DAB\backsim\triangle EAC$，$\therefore \angle ABD=\angle ACE$.

$\because \angle BGF=\angle AGC$，$\therefore \angle BFG=\angle GAC$，

$\therefore \sin\angle BFC=\sin\angle BAC$.

在 Rt$\triangle ABC$ 中，$\sin\angle BAC=\frac{BC}{AC}=\frac{4x}{5x}=\frac{4}{5}$，$\therefore \sin\angle BFC=\frac{4}{5}$.

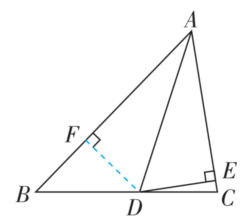
考点 23 锐角三角函数

刷基础

1. C 【解析】$\because \tan 60°=\sqrt{3}$，$\therefore 2\sqrt{3}-\tan 60°=2\sqrt{3}-\sqrt{3}=\sqrt{3}$，故选 C.

2. 0 【解析】原式 $=1-2\times\frac{1}{2}=1-1=0$，故答案为 0.

3. B 【解析】作 $DF\perp AB$ 于点 F，如图. $\because AD$ 平分 $\angle BAC$，$DE\perp AC$，$\therefore DF=DE=1$. $\because \sin B=\frac{\sqrt{2}}{2}$，$\therefore \angle B=45°$，$\therefore \triangle BDF$ 是等腰直角三角形，$\therefore BF=DF=1$. $\because AB=3$，$\therefore AF=2$. 在 Rt$\triangle ADF$ 中，由勾股定理得 $AD=\sqrt{AF^2+DF^2}=\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}$，故选 B.



4. C 【解析】$\because \angle C=90°$，$AC=4$，$\cos A=\frac{4}{5}$，$\therefore AB=\frac{AC}{\cos A}=5$，$\therefore BC=\sqrt{AB^2-AC^2}=3$. $\because \angle DBC=\angle A$，$\therefore \cos\angle DBC=\cos A=\frac{BC}{BD}=\frac{4}{5}$，$\therefore BD=3\times\frac{5}{4}=\frac{15}{4}$，故选 C.

刷有所得

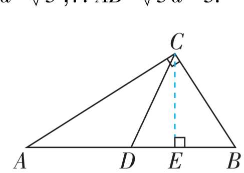
解直角三角形要用到的关系

$\triangle ABC$ 中，$\angle C=90°$，a，b，c 分别是 $\angle A$，$\angle B$，$\angle C$ 的对边. ①锐角之间的关系：$\angle A+\angle B=90°$；②三边之间的关系：$a^2+b^2=c^2$；③边角之间的关系：$\sin A=\frac{\angle A\text{ 的对边}}{\text{斜边}}=\frac{a}{c}$，$\cos A=\frac{\angle A\text{ 的邻边}}{\text{斜边}}=\frac{b}{c}$，$\tan A=\frac{\angle A\text{ 的对边}}{\angle A\text{ 的邻边}}=\frac{a}{b}$.

5. $\frac{13}{3}$ 【解析】在 $\triangle ABC$ 中，$BC=5$，$AC=12$，$\angle ACB=90°$，$\therefore AB=\sqrt{AC^2+BC^2}=13$，$\therefore \cos A=\frac{AC}{AB}=\frac{12}{13}$. 由题意可知，$BD=BC=5$，$MN$ 垂直平分 AD，$\therefore AD=AB-BD=8$，$EF\perp AD$，$\therefore AF=\frac{1}{2}AD=4$. 在 Rt$\triangle AEF$ 中，$AE=\frac{AF}{\cos A}=\frac{4}{\frac{12}{13}}=\frac{13}{3}$，故答案为 $\frac{13}{3}$.

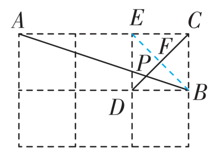
6.【解】(1)$\because \angle ACB=90°$，$\sin B=\frac{2}{5}\sqrt{5}$，$\therefore \frac{AC}{AB}=\frac{2}{5}\sqrt{5}$. 设 $AB=\sqrt{5}a$，则 $AC=2a$，$\therefore BC=\sqrt{AB^2-AC^2}=a=\sqrt{5}$，$\therefore AB=\sqrt{5}a=5$.

(2)如图，过点 C 作 $CE\perp AB$ 于点 E. $\because CD$ 是 Rt$\triangle ACB$ 中斜边 AB 上的中线，$\therefore AD=BD=CD=\frac{1}{2}AB=$



$\frac{5}{2}$. 设 $DE=b$,则 $BE=BD-DE=\frac{5}{2}-b$. ∵ $CE^2=CD^2-DE^2=BC^2-BE^2$,∴ $\left(\frac{5}{2}\right)^2-b^2=(\sqrt{5})^2-\left(\frac{5}{2}-b\right)^2$,解得 $b=\frac{3}{2}$,即 $DE=\frac{3}{2}$,∴ $CE=\sqrt{CD^2-DE^2}=2$,∴ $\tan\angle CDB=\frac{CE}{DE}=\frac{2}{\frac{3}{2}}=\frac{4}{3}$.

7.【解】如图,连接 BE 交 DC 于点 F. ∵ 四边形 $BCED$ 是正方形,∴ $DF=CF=\frac{1}{2}CD$,$BF=\frac{1}{2}BE$,$CD=BE$,$BE\perp CD$,



∴ $BF=CF$. 根据题意得,$AC//BD$,∴ $\triangle ACP\backsim\triangle BDP$,∴ $DP:CP=BD:AC=1:3$,∴ $DP:DF=1:2$,∴ $DP=PF=\frac{1}{2}CF=\frac{1}{2}BF$.

在 Rt $\triangle PBF$ 中,$\tan\angle BPF=\frac{BF}{PF}=2$. ∵ $\angle APD=\angle BPF$,

∴ $\tan\angle APD=2$.

考点 24 锐角三角函数的实际应用

刷提升

1.【解】过点 A 作 $AE\perp CD$,垂足为点 E.

由题意可知,四边形 $ABCE$ 为矩形,∴ $CE=AB=13.20$.

在 Rt$\triangle ACE$ 中,$\tan\angle CAE=\frac{CE}{AE}$,

∴ $AE=\frac{13.20}{\tan 23.8°}\approx\frac{13.20}{0.44}=30$.

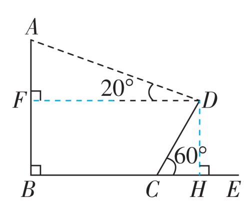
在 Rt$\triangle ADE$ 中,$\cos\angle DAE=\frac{AE}{AD}$,

∴ $AD=\frac{30}{\cos 36.9°}\approx\frac{30}{0.80}=37.5$,

∴ AD 的长约为 37.5 m.

2. $2\sqrt{2}$ **【解析】**∵ 沿一斜坡向上走 12 米,高度上升 4 米,∴ 水平距离为 $\sqrt{12^2-4^2}=8\sqrt{2}$(米),∴ $i=\frac{4}{8\sqrt{2}}=1:2\sqrt{2}$,故答案为 $2\sqrt{2}$.

3.【解】如图,过点 D 作 $DF\perp AB$ 于点 F,作 $DH\perp BE$ 于点 H. 在 Rt$\triangle DCH$ 中,$DC=20$ m,$\angle DCH=60°$,$\cos\angle DCH=\frac{CH}{CD}$,$\sin\angle DCH=\frac{DH}{CD}$,



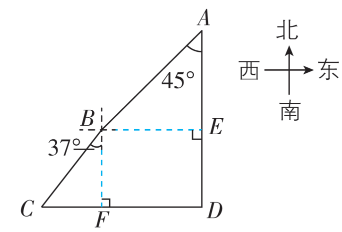
∴ $CH=CD\cdot\cos 60°=10$ m,$DH=CD\cdot\sin 60°=10\sqrt{3}\approx10\times1.73=17.3$(m). ∵ $\angle DFB=\angle B=\angle DHB=90°$,∴ 四边形 $DFBH$ 为矩形,∴ $BH=FD$,$BF=DH=17.3$ m. ∵ $BH=BC+CH=30+10=40$(m),∴ $FD=40$ m. 在 Rt$\triangle AFD$ 中,$\tan\angle ADF=\frac{AF}{FD}$,

∴ $AF=FD\cdot\tan 20°\approx40\times0.36=14.4$(m),∴ $AB=AF+BF=14.4+17.3\approx32$(m).

答:该风力发电机塔杆 AB 的高度约为 32 m.

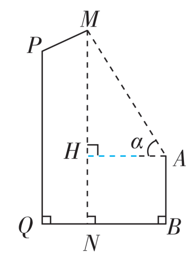
4.【解】如图,过点 B 分别作 AD,CD 的垂线,垂足分别为 E,F,则四边形 $BEDF$ 是矩形,∴ $BE=FD$,$BF=ED$.

由题意得,$\angle CBF=37°$,$\angle BAE=45°$,∴ 在 Rt$\triangle BCF$ 中,$CF=BC\cdot\sin 37°\approx400\times0.60=240$(米),$BF=BC\cdot\cos 37°\approx400\times0.80=320$(米),∴ $AE=BE=FD=CD-CF=700-240=460$(米),$DE=BF=320$ 米,∴ $AD=AE+DE=460+320=780$(米).



答:入口 A 与景点 D 之间的距离约为 780 米.

5.【解】如图,过点 A 作 $AH\perp MN$ 于点 H,则四边形 $ABNH$ 是矩形,



∴ $AH=BN=2$ m,$HN=AB=1.6$ m.

在 Rt$\triangle AMH$ 中,$\tan\alpha=\frac{MH}{AH}$,$\alpha=58°$,

∴ $MH=AH\cdot\tan 58°\approx2\times1.60=3.2$(m),

∴ $MN=MH+HN=3.2+1.6=4.8$(m).

答:路灯顶部到地面的距离 MN 约为 4.8 m.

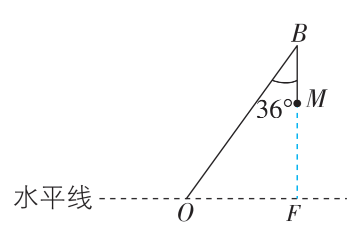
6.【解】(1)由题意得,$BM\perp OM$.

∵ $\angle BOM=18.17°$,$BM=3$ 米,

∴ 在 Rt$\triangle BOM$ 中,$OB=\frac{MB}{\sin\angle BOM}\approx\frac{3}{0.31}\approx10$(米).

答:直吊臂 OB 的长约为 10 米.

(2)如图,延长 BM 与水平线交于点 F,



则 $\angle BFO=90°$.

由(1)知,$OB=10$ 米,

∴ $BF=OB\times\cos\angle OBM\approx10\times0.81=8.1$(米),

∴ $MF=BF-BM=8.1-3=5.1\approx5$(米).

答:货物 M 上升了约 5 米.

刷素养

7.【解】"测角仪"方案:∵ $CD\perp BD$,$AB\perp BD$,$CF\perp AB$,

∴ 四边形 $CDBF$ 是矩形,

∴ $CF=BD=10$ m,$BF=CD=1.6$ m.

$\because \angle ACF=32.5°$，$\therefore AF=CF\cdot\tan 32.5°\approx 10\times0.64=6.4(\mathrm{m})$，$\therefore AB=AF+BF=6.4+1.6=8(\mathrm{m})$.

答：树 AB 的高度约为 8 m.

“平面镜”方案：$\because CD\perp BD, AB\perp BD$，

$\therefore \angle CDE=\angle ABE=90°$.

$\because \angle CED=\angle AEB$，$\therefore \triangle CDE\backsim\triangle ABE$，

$\therefore \dfrac{CD}{AB}=\dfrac{DE}{BE}$，$\therefore \dfrac{1.6}{AB}=\dfrac{2}{10}$，$\therefore AB=8$ m.

答：树 AB 的高度约为 8 m.

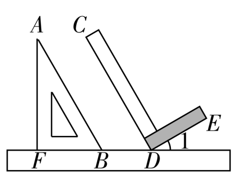
（从以上两种方案中任选一种作答即可）

C 检测验收练

刷速度

1. B 【解析】由题意得，6−4<所找木条的长<6+4，即 2<所找木条的长<10，故选 B.

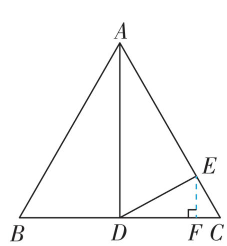
2. A 【解析】如图，由题知 $\angle ABF=60°$. $\because AB/\!/CD$，$\therefore \angle CDB=\angle ABF=60°$. $\because CD\perp DE$，$\therefore \angle CDE=90°$，$\therefore \angle 1=180°-60°-90°=30°$. 故选 A.



3. B 【解析】$\because BD$ 平分 $\angle ABC$，$\therefore \angle ABD=\angle CBD$. $\because DE/\!/AB$，$\therefore \angle EDB=\angle ABD$，$\therefore \angle EDB=\angle DBE$，$\therefore BE=DE$. $\because DE/\!/AB$，$\therefore \triangle CDE\backsim\triangle CAB$，$\therefore \dfrac{EC}{BC}=\dfrac{DE}{AB}$，即 $\dfrac{4-BE}{BC}=\dfrac{DE}{AB}$，$\therefore \dfrac{4-DE}{4}=\dfrac{DE}{2}$，解得 $DE=\dfrac{4}{3}$，故选 B.

4. A 【解析】$\because BE\perp AD$，$AE=DE=4$，$\therefore AB=DB$，$AD=8$，$\therefore \angle BAD=\angle BDA$. $\because \angle BAD=2\angle C$，$\therefore \angle BDA=2\angle C$. $\because \angle BDA=\angle C+\angle DAC$，$\therefore \angle C=\angle DAC$，$\therefore AD=CD=8$，$\therefore BD=BC-CD=20-8=12$，$\therefore AB=12$，故选 A.

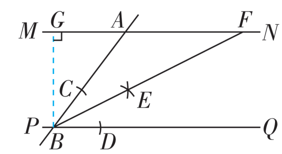
5. A 【解析】设 $\triangle ABC$ 的边长为 x，则 $AB=BC=AC=x$. $\because BD=4$，$\therefore CD=BC-BD=x-4$. $\because \triangle ABC$ 是等边三角形，$\therefore \angle B=\angle C=60°$，$\therefore \angle BAD+\angle ADB=120°$. $\because \angle ADE=60°$，$\therefore \angle ADB+\angle CDE=120°$，$\therefore \angle BAD=\angle CDE$. 又 $\because \angle B=\angle C$，



$\therefore \triangle ABD\backsim\triangle DCE$，$\therefore \dfrac{AB}{CD}=\dfrac{BD}{CE}$，$\therefore \dfrac{x}{x-4}=\dfrac{4}{2}$，解得 $x=8$，经检验，$x=8$ 是原方程的解，$\therefore CD=4$. 如图，过点 E 作 $EF\perp BC$ 于点 F. 在 Rt$\triangle CEF$ 中，$EF=CE\cdot\sin C=2\sin 60°=\sqrt{3}$，$\therefore S_{\triangle CDE}=\dfrac{1}{2}CD\cdot EF=\dfrac{1}{2}\times4\times\sqrt{3}=2\sqrt{3}$，故选 A.

6. D 【解析】$\because AB=AC$，$\therefore \angle B=\angle C$. 在 $\triangle ABE$ 和 $\triangle ACD$ 中，$\begin{cases}AB=AC,\\ \angle B=\angle C,\\ BE=CD,\end{cases}$ $\therefore \triangle ABE\cong\triangle ACD(\mathrm{SAS})$，$\therefore AD=AE$. $\because AB=AB$，$\angle B=\angle B$，$AD=AE$，$\angle BAD\neq\angle BAE$，$\therefore \triangle ABD$ 和 $\triangle ABE$ 是一对“伪全等三角形”. 同理可得，$\triangle ABD$ 和 $\triangle ACD$ 是一对“伪全等三角形”，$\triangle ACD$ 和 $\triangle ACE$ 是一对“伪全等三角形”，$\triangle ABE$ 和 $\triangle ACE$ 是一对“伪全等三角形”，$\therefore$ 题图(2)中共有 4 对“伪全等三角形”. 故选 D.

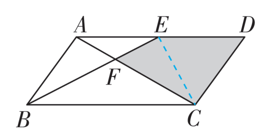
7. D 【解析】如图所示，过点 B 作 $BG\perp MN$ 于点 G. $\because MN$ 与 PQ 之间的距离为 8，$\therefore BG=8$，$\therefore \sin\angle MAB=\dfrac{BG}{AB}=\dfrac{8}{AB}=\dfrac{4}{5}$，



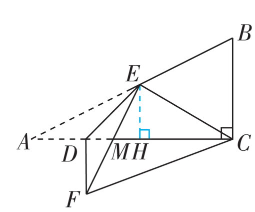
$\therefore AB=10$. 由作图得 BF 平分 $\angle ABQ$，$\therefore \angle ABF=\angle QBF$. $\because MN/\!/PQ$，$\therefore \angle AFB=\angle QBF$，$\therefore \angle ABF=\angle AFB$，$\therefore AF=AB=10$，故选 D.

8. 2 【解析】$\sqrt{3}\tan 30°+\sqrt{2}\sin 45°=\sqrt{3}\times\dfrac{\sqrt{3}}{3}+\sqrt{2}\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}=1+1=2$，故答案为 2.

9. 10 【解析】连接 EC，如图. $\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，$\therefore AB=CD$，$AD=BC$，$AD/\!/BC$，$\therefore \angle AEB=\angle CBE$. $\because BE$ 平分 $\angle ABC$，$\therefore \angle ABE=\angle CBE$，$\therefore \angle ABE=\angle AEB$，$\therefore AE=AB$. $\because BC=2AB$，$\therefore AB=\dfrac{1}{2}BC=\dfrac{1}{2}AD$，$\therefore AE=\dfrac{1}{2}AD=\dfrac{1}{2}BC$. $\because AD/\!/BC$，$\therefore$ 易得 $\triangle AEF\backsim\triangle CBF$，$\therefore \dfrac{AF}{CF}=\dfrac{AE}{BC}=\dfrac{1}{2}$，$\therefore FC=2AF$. $\because S_{\triangle AEF}=2$，$\therefore S_{\triangle CEF}=2S_{\triangle AEF}=4$，$\therefore S_{\triangle ACE}=S_{\triangle AEF}+S_{\triangle CEF}=6$. $\because AE=\dfrac{1}{2}AD$，$\therefore S_{\triangle ACD}=2S_{\triangle ACE}=12$，$\therefore S_{四边形CDEF}=S_{\triangle ACD}-S_{\triangle AEF}=12-2=10$，故答案为 10.



10. $\dfrac{10}{3}$ 【解析】$\because AE=\sqrt{5}AD$，$\therefore$ 设 $AD=x$，则 $AE=\sqrt{5}x$. $\because \triangle ADE$ 沿 DE 翻折，得到 $\triangle FDE$，$\therefore DF=AD=x$，$\angle ADE=\angle FDE$. 如图，过 E 作 $EH\perp AC$ 于 H，设 EF 与 AC 相交于 M，则 $\angle AHE=\angle ACB=90°$. 又 $\because \angle A=\angle A$，$\therefore \triangle AHE\backsim\triangle ACB$，$\therefore \dfrac{EH}{BC}=\dfrac{AH}{AC}=\dfrac{AE}{AB}$. $\because CB=5$，$CA=10$，

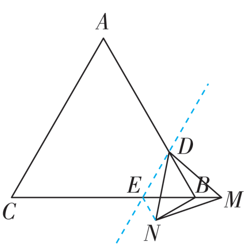


$\therefore AB=\sqrt{AC^2+BC^2}=\sqrt{10^2+5^2}=5\sqrt{5}$，$\therefore \dfrac{EH}{5}=\dfrac{AH}{10}=\dfrac{\sqrt{5}x}{5\sqrt{5}}$，$\therefore EH=x=DF$，$AH=2x$，则 $DH=AH-AD=x=EH$，$\therefore \triangle EHD$ 是

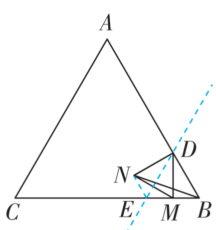
等腰直角三角形，∴ $\angle HDE=\angle HED=45°$，则 $\angle ADE=\angle EDF=135°$，∴ $\angle FDM=135°-45°=90°$. 在 $\triangle FDM$ 和 $\triangle EHM$ 中，$\begin{cases}\angle FDM=\angle EHM=90°,\\ \angle DMF=\angle HME,\\ DF=EH,\end{cases}$ ∴ $\triangle FDM\cong\triangle EHM$（AAS），∴ $DM=MH=\frac{1}{2}x$，∴ $CM=AC-AD-DM=10-\frac{3}{2}x$，

∴ $S_{\triangle CEF}=S_{\triangle CME}+S_{\triangle CMF}=\frac{1}{2}CM\cdot EH+\frac{1}{2}CM\cdot DF=\frac{1}{2}\left(10-\frac{3}{2}x\right)\cdot x\times2=\left(10-\frac{3}{2}x\right)\cdot x$，$S_{\triangle BEC}=S_{\triangle ABC}-S_{\triangle AEC}=\frac{1}{2}\times10\times5-\frac{1}{2}\times10\cdot x=25-5x$. ∵ $\triangle CEF$ 的面积是 $\triangle BEC$ 面积的 2 倍，∴ $\left(10-\frac{3}{2}x\right)\cdot x=2(25-5x)$，则 $3x^2-40x+100=0$，解得 $x_1=\frac{10}{3}$，$x_2=10$（舍去），即 $AD=\frac{10}{3}$，故答案为 $\frac{10}{3}$.

11. 6 或 8 或 9 【解析】过点 D 作 $DE//AC$ 交 BC 于点 E. ①当 $\angle DBN=90°$ 时，如图(1)，连接 NE. ∵ $\triangle BAC$，$\triangle DMN$ 是等边三角形，$DE//AC$，∴ $\angle ABC=\angle DEB=\angle MDN=\angle BDE=60°$，$DM=DN$，∴ $\triangle DBE$ 是等边三角形，∴ $BD=DE=BE=2$，$\angle NBE=\angle DBN-\angle DBE=30°$，$\angle EDN+\angle NDB=\angle NDB+\angle MDB=60°$，∴ $\angle EDN=\angle BDM$，∴ $\triangle DEN\cong\triangle DBM$（SAS），∴ $\angle DEN=\angle DBM=180°-60°=120°$，$BM=NE$，∴ $\angle BEN=\angle DEN-\angle DEB=60°$，∴ $\angle BNE=90°$，∴ $NE=\frac{1}{2}BE=1$，∴ $BM=1$，∴ $MC=BC+BM=7+1=8$.



图(1)

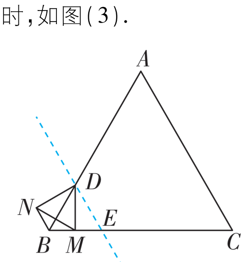


图(2)

②当 $\angle BDN=90°$ 时，如图(2)，连接 NE.

同理可得 $\triangle BDE$ 为等边三角形，$\triangle DEN\cong\triangle DBM$，$\angle NDE=\angle BDN-\angle BDE=90°-60°=30°$，∴ $\angle NED=\angle MBD=60°$，∴ $\angle DMB=\angle DNE=90°$，∴ $BM=BD\cos60°=2\times\frac{1}{2}=1$，∴ $CM=BC-BM=6$.

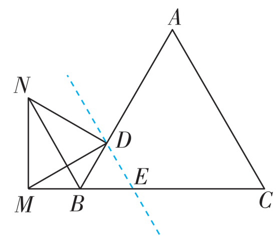
③当 $\angle BND=90°$ 时，如图(3).



图(3)

同理可证 $\triangle BDE$ 是等边三角形，$\triangle DBN\cong\triangle DEM$，∴ $DE=BD=2$，$\angle DEM=60°$，$\angle DME=\angle DNB=90°$，∴ $\angle DMB=90°$，∴ $MB=DB\cos60°=2\times\frac{1}{2}=1$，∴ $CM=BC-BM=6$.

④当 $\angle BDN=90°$ 时，如图(4).



图(4)

同理可证 $\triangle BDE$ 是等边三角形，$\triangle DNB\cong\triangle DME$，∴ $DE=BD=BE=2$，$\angle DEM=60°$，$\angle MDE=\angle NDB=90°$，$CE=BC-BE=5$，∴ $ME=\frac{DE}{\cos60°}=\frac{2}{\frac{1}{2}}=4$，∴ $CM=ME+CE=9$.

综上所述，CM 的长是 6 或 8 或 9. 故答案为 6 或 8 或 9.

12. (1)【证明】在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle ADE$ 中，$\begin{cases}BC=DE,\\ \angle B=\angle D,\\ AB=AD,\end{cases}$

∴ $\triangle ABC\cong\triangle ADE$（SAS）.

(2)【解】由(1)得 $\triangle ABC\cong\triangle ADE$，∴ $AC=AE$，$\angle CAE=\angle BAC=60°$，∴ $\triangle ACE$ 是等边三角形，∴ $\angle ACE=60°$.

13.【解】(1)在 Rt$\triangle ABC$ 中，$\angle A=45°$，

∴ $\angle ABC=45°$，∴ $BC=AC=20$ cm.

(2)由题可知 $ON=EC=\frac{1}{2}AC=10$ cm，

∴ 易得 $NB=ON=10$ cm.

又∵ $\angle DON=32°$，∴ $DN=ON\times\tan\angle DON=10\times\tan32°\approx10\times0.62=6.2$(cm)，∴ $BD=BN-DN=10-6.2=3.8$(cm)，即 B，D 之间的距离约为 3.8 cm.

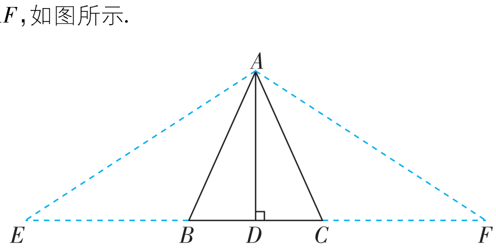
14. (1)【证明】∵ $AD\perp BC$，∴ $\angle ADB=\angle ADC=90°$.

在 $\triangle ADB$ 和 $\triangle ADC$ 中，$\begin{cases}AD=AD,\\ \angle ADB=\angle ADC,\\ BD=CD,\end{cases}$

∴ $\triangle ADB\cong\triangle ADC$（SAS），∴ $\angle B=\angle C$.

(2)【解】小军的证明过程：

分别延长 DB，DC 至 E，F 两点，使得 $BE=BA$，$CF=CA$，连接 AE，AF，如图所示.



第一部分 考点过关
第二部分 题型突破
第三部分 中考新趋势
狂K重点

$\because AB+BD=AC+CD$，$\therefore BE+BD=CF+CD$，即 $DE=DF$.

$\because AD\perp BC$，$\therefore \angle ADE=\angle ADF=90°$.

在 $\triangle ADE$ 和 $\triangle ADF$ 中，$\begin{cases}AD=AD,\\ \angle ADE=\angle ADF,\\ DE=DF,\end{cases}$

$\therefore \triangle ADE\cong\triangle ADF$（SAS），$\therefore \angle E=\angle F$.

$\because BE=BA$，$CF=CA$，$\therefore \angle E=\angle BAE$，$\angle F=\angle CAF$.

$\because \angle ABC=\angle E+\angle BAE$，$\angle ACB=\angle F+\angle CAF$，

$\therefore \angle ABC=\angle ACB$.

小民的证明过程：

$\because AD\perp BC$，$\therefore \triangle ADB$ 与 $\triangle ADC$ 均为直角三角形.

根据勾股定理，得 $AD^2+BD^2=AB^2$，$AD^2+CD^2=AC^2$，$\therefore AB^2-BD^2=AC^2-CD^2$，$\therefore AB^2+CD^2=AC^2+BD^2$.

$\because AB+BD=AC+CD$，$\therefore AB-CD=AC-BD$，

$\therefore (AB-CD)^2=(AC-BD)^2$，

$\therefore AB^2-2AB\cdot CD+CD^2=AC^2-2AC\cdot BD+BD^2$，

$\therefore AB\cdot CD=AC\cdot BD$，$\therefore \dfrac{AB}{AC}=\dfrac{BD}{CD}$，

$\therefore$ 易得 $\triangle ADB\backsim\triangle ADC$，$\therefore \angle B=\angle C$.

15.【解】（1）①$CE+CD=CA$.

理由如下：$\because \triangle ABC$ 和 $\triangle ADE$ 都是等边三角形，

$\therefore AB=AC=BC$，$AD=AE=DE$，$\angle BAC=\angle DAE=60°$，

$\therefore \angle BAC-\angle DAC=\angle DAE-\angle DAC$，

$\therefore \angle BAD=\angle CAE$.

在 $\triangle ABD$ 和 $\triangle ACE$ 中，$\begin{cases}AB=AC,\\ \angle BAD=\angle CAE,\\ AD=AE,\end{cases}$

$\therefore \triangle ABD\cong\triangle ACE$（SAS），$\therefore CE=BD$.

$\because BD+CD=BC$，$\therefore CE+CD=CA$.

②$CA+CD=CE$.

理由如下：$\because \triangle ABC$ 和 $\triangle ADE$ 都是等边三角形，

$\therefore AB=AC=BC$，$AD=AE=DE$，$\angle BAC=\angle DAE=60°$，

$\therefore \angle BAC+\angle DAC=\angle DAE+\angle DAC$，$\therefore \angle BAD=\angle CAE$.

在 $\triangle ABD$ 和 $\triangle ACE$ 中，$\begin{cases}AB=AC,\\ \angle BAD=\angle CAE,\\ AD=AE,\end{cases}$

$\therefore \triangle ABD\cong\triangle ACE$（SAS），$\therefore CE=BD$.

$\because CB+CD=BD$，$\therefore CA+CD=CE$.

（2）$6-\sqrt{3}$ 或 $6+2\sqrt{3}$.

过 E 作 $EH/\!/AB$，则 $\triangle EHC$ 为等边三角形.

①当点 D 在 H 左侧时，如图（1）.

$\because ED=EF$，易知 $\angle DEH=\angle FEC$，$EH=EC$，

$\therefore \triangle EDH\cong\triangle EFC$（SAS），$\therefore \angle ECF=\angle EHD=120°$，

此时 $\triangle CEF$ 不可能为直角三角形.

②当点 D 在 H 右侧，且在线段 CH 上时，如图（2）.

同理可得 $\triangle EDH\cong\triangle EFC$（SAS），

$\therefore \angle FCE=\angle EHD=60°$，$\angle FEC=\angle DEH<\angle HEC=60°$.

此时只有 $\angle EFC$ 有可能为 $90°$.

当 $\angle EFC=90°$ 时，$\angle EDH=90°$，$\therefore ED\perp CH$.

$\because CH=CE=2\sqrt{3}$，$\therefore CD=\dfrac{1}{2}CH=\sqrt{3}$，$\therefore BD=6-\sqrt{3}$.

③当点 D 在 H 右侧，且在 HC 延长线上时，如图（3）.

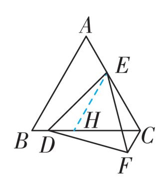
此时只有 $\angle CEF$ 有可能为 $90°$.

当 $\angle CEF=90°$ 时，$\because \angle DEF=60°$，$\therefore \angle CED=30°$.

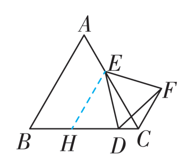
$\because \angle ECH=60°$，

$\therefore \angle EDC=\angle CED=30°$，$\therefore CD=CE=2\sqrt{3}$，

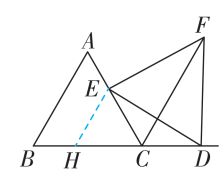
$\therefore BD=6+2\sqrt{3}$.



图（1）



图（2）



图（3）

综上，BD 的长为 $6-\sqrt{3}$ 或 $6+2\sqrt{3}$.

第五章　四边形

A 2025 真题诊断练

刷 诊断

1. C　【解析】$\because$ 四边形 $ABCD$ 为平行四边形，$\therefore AB=CD$. $\because E$ 为 AD 的中点，O 为 AC 的中点，$\therefore OE=\dfrac{1}{2}CD$，$\therefore OE=\dfrac{1}{2}AB$. 故选 C.

2. C　【解析】如图所示，连接 EG. $\because$ 四边形 $ABCD$ 为平行四边形，$\therefore AD/\!/BC$，$\angle A=\angle C$，$AD=BC$. $\because E$，G 分别为边 AD，BC 的中点，$\therefore DE=AE=BG=CG$. 又 $\because AF=CH$，$\therefore \triangle AEF\cong\triangle CGH$（SAS），$\therefore EF=GH$，同理可证 $EH=GF$，$\therefore$ 四边形 $EFGH$ 为平行四边形. $\because AE/\!/BG$，且 $AE=BG$，$\therefore$ 四边形 $EABG$ 为平行四边形，$\therefore S_{\triangle EFG}=\dfrac{1}{2}S_{\square EFGH}=\dfrac{1}{2}S_{\square ABGE}=\dfrac{1}{4}S_{\square ABCD}$，$\therefore S_{\square EFGH}=\dfrac{1}{2}S_{\square ABCD}$，故四边形 $EFGH$ 的面积为定值，故选 C.